

Г.А. Геворкян,
Н. В. Пирумян,
Н.Р. Мехрабекян,
Г.А Саркисян

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ МЕТОДЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ТРЕУГОЛЬНЫХ И ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ФОРМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗГИБА ПЛАСТИН

Предлагается метод конечных элементов треугольной формы с десятью степенями свободы, в котором при решении задач изгиба пластин в качестве десятой степени свободы использован угол сдвига в узле, находящемся в начале координат. Рассматривается метод конечных элементов прямоугольной формы с тринадцатью степенями свободы.

Ключевые слова: конечные элементы, узловые перемещения, квадратичное программирование, пластина, изгиб.

Срединную плоскость пластины представим в виде совокупности \bar{n} конечных элементов треугольных форм. В каждой узловой точке s -го конечного элемента пластины введем по три обобщенных перемещения: \bar{w}^s – перемещение в направлении оси z , два угла поворота $\theta^s = \partial \bar{w}^s / \partial y$, $\omega^s = -\partial \bar{w}^s / \partial x$ соответственно вокруг осей x , y . Рассмотренный треугольный элемент пластины дополним десятой степенью свободы, в качестве которой используем угол сдвига $\gamma^s = \partial^2 \bar{w}^s / \partial x \partial y$ в узле, находящемся в начале координат. Узловые значения обобщенных перемещений для s -го конечного элемента в плоскости xu зададим вектором $\bar{w}^s = (\bar{w}_1^s, \bar{w}_2^s, \dots, \bar{w}_{10}^s)^T$.

Схематическое изображение s -го конечного элемента в плоскости xu для данного случая приведено на рис. 1.

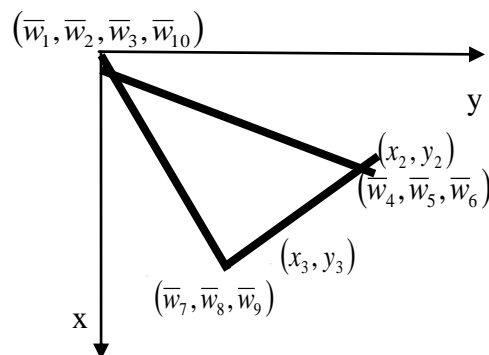


Рис. 1. Схематическое изображение конечного элемента

Перемещения точек срединной поверхности s -го конечного элемента аппроксимируем следующим полным кубическим полиномом, содержащим 10 неизвестных параметров:

$$\bar{w}^s(x, y) = \alpha_1^s + \alpha_2^s x + \alpha_3^s y + \alpha_4^s x^2 + \alpha_5^s xy + \alpha_6^s y^2 + \alpha_7^s x^3 + \alpha_8^s x^2 y + \alpha_9^s xy^2 + \alpha_{10}^s y^3, \quad (1)$$

который заменим удобным для практического использования выражением

$$\bar{w}^s(x, y) = \sum_{i=1}^{10} \bar{w}_i^s \Phi_i(x, y). \quad (2)$$

Здесь $\Phi_i^s(x, y)$ – функции Эрмита, $\bar{w}_i^s, i \in \{1, 2, \dots, 10\}$, – узловые значения обобщенных перемещений s -го конечного элемента, которые задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \bar{w}_1^s &= \bar{w}^s(0, 0), \quad \bar{w}_2^s = \frac{\partial \bar{w}^s}{\partial y}(0, 0), \quad \bar{w}_3^s = -\frac{\partial \bar{w}^s}{\partial x}(0, 0), \\ \bar{w}_4^s &= \bar{w}^s(x_2, y_2), \quad \bar{w}_5^s = \frac{\partial \bar{w}^s}{\partial y}(x_2, y_2), \quad \bar{w}_6^s = -\frac{\partial \bar{w}^s}{\partial x}(x_2, y_2), \\ \bar{w}_7^s &= \bar{w}^s(x_3, y_3), \quad \bar{w}_8^s = \frac{\partial \bar{w}^s}{\partial y}(x_3, y_3), \quad \bar{w}_9^s = -\frac{\partial \bar{w}^s}{\partial x}(x_3, y_3) \end{aligned} \quad (3)$$

и

$$\bar{w}_{10}^s = \frac{\partial^2 \bar{w}^s}{\partial x \partial y}(0, 0), \quad (4)$$

Подставляя в (3) и (4) значения \bar{w}^s , по формуле (1) для определения неизвестных параметров $\alpha_i^s, i \in \{1, 2, \dots, 10\}$ получим следующую систему уравнений

$$\alpha_1^s = \bar{w}_1^s, \quad (5)$$

$$\alpha_2^s = -\bar{w}_3^s, \quad (6)$$

$$\alpha_3^s = \bar{w}_2^s, \quad (7)$$

$$\alpha_1^s + x_2 \alpha_2^s + y_2 \alpha_3^s + x_2^2 \alpha_4^s + x_2 y_2 \alpha_5^s + y_2^2 \alpha_6^s + x_2^3 \alpha_7^s + x_2^2 y_2 \alpha_8^s + x_2 y_2^2 \alpha_9^s + y_2^2 \alpha_{10}^s = \bar{w}_4^s, \quad (8)$$

$$\alpha_3^s + x_2 \alpha_5^s + 2 y_2 \alpha_6^s + x_2^2 \alpha_8^s + 2 x_2 y_2 \alpha_9^s + 3 y_2^2 \alpha_{10}^s = \bar{w}_5^s, \quad (9)$$

$$-\alpha_2^s - 2 x_2 \alpha_4^s - y_2 \alpha_5^s - 3 x_2^2 \alpha_7^s - 2 x_2 y_2 \alpha_8^s - y_2^2 \alpha_9^s = \bar{w}_6^s, \quad (10)$$

$$\alpha_1^s + x_3 \alpha_2^s + y_3 \alpha_3^s + x_3^2 \alpha_4^s + x_3 y_3 \alpha_5^s + y_3^2 \alpha_6^s + x_3^3 \alpha_7^s + x_3^2 y_3 \alpha_8^s + x_3 y_3^2 \alpha_9^s + y_3^2 \alpha_{10}^s = \bar{w}_7^s, \quad (11)$$

$$\alpha_3^s + x_3 \alpha_5^s + 2 y_3 \alpha_6^s + x_3^2 \alpha_8^s + 2 x_3 y_3 \alpha_9^s + 3 y_3^2 \alpha_{10}^s = \bar{w}_8^s, \quad (12)$$

$$-\alpha_2^s - 2 x_3 \alpha_4^s - y_3 \alpha_5^s - 3 x_3^2 \alpha_7^s - 2 x_3 y_3 \alpha_8^s - y_3^2 \alpha_9^s = \bar{w}_9^s, \quad (13)$$

$$\alpha_5^s = \bar{w}_{10}^s. \quad (14)$$

После несложных преобразований из соотношений (5)–(7) и (11)–(14) для определения неизвестных параметров $\alpha_i^s, i \in \{4, 7, 8\}$ получим

$$\alpha_4^s = -\frac{3}{x_3^2} \bar{w}_1^s - \frac{2 y_3}{x_3^2} \bar{w}_2^s + \frac{2}{x_3} \bar{w}_3^s + \frac{3}{x_3^2} \bar{w}_7^s - \frac{y_3}{x_3^2} \bar{w}_8^s + \frac{1}{x_3} \bar{w}_9^s - \frac{y_3}{x_3} \bar{w}_{10}^s - \frac{y_3^2}{x_3^2} \alpha_6^s, \quad (15)$$

$$\alpha_7^s = \frac{2}{x_3^3} \bar{w}_1^s + \frac{2 y_3}{x_3^3} \bar{w}_2^s - \frac{1}{x_3^2} \bar{w}_3^s - \frac{2}{x_3^3} \bar{w}_7^s - \frac{1}{x_3^2} \bar{w}_8^s + \frac{y_3}{x_3^2} \bar{w}_9^s + \frac{2 y_3^2}{x_3^3} \alpha_6^s + \frac{y_3^2}{x_3^2} \alpha_9^s + \frac{2 y_3^3}{x_3^3} \alpha_{10}^s, \quad (16)$$

$$\alpha_8^s = -\frac{1}{x_3^2} \bar{w}_2^s + \frac{1}{x_3^2} \bar{w}_8^s - \frac{1}{x_3} \bar{w}_{10}^s - \frac{2 y_3}{x_3^2} \alpha_6^s - \frac{2 y_3}{x_3} \alpha_9^s - \frac{3 y_3^2}{x_3^2} \alpha_{10}^s. \quad (17)$$

С учетом соотношений (5)–(7) и (14)–(17) из равенства (10) находим

$$\alpha_9^s = a_9 \alpha_6^s + b_9 \alpha_{10}^s + \sum_{i=1}^{10} \bar{d}_{9,i} \bar{w}_i^s, \quad (18)$$

где

$$d_9 = 4x_2 x_3^2 y_2 y_3 - 3x_2^2 x_3 y_3^2 - x_3^3 y_2^2,$$

$$a_9 = (6x_2^2 y_3^2 - 2x_2 x_3 y_3^2 - 4x_2 x_3 y_2 y_3) / d_9, \quad b_9 = (6x_2^2 y_3^2 - 6x_2 x_3 y_2 y_3) / d_9,$$

$$\bar{d}_{9,1} = (6x_2^2 - 6x_2 x_3) / d_9, \quad \bar{d}_{9,2} = (6x_2^2 y_3 - 2x_2 x_3 y_2 - 4x_2 x_3 y_3) / d_9, \quad \bar{d}_{9,3} = (4x_2 x_3^2 - x_3^3 - 3x_2^2 x_3) / d_9,$$

$$\bar{d}_{9,4} = \bar{d}_{9,5} = 0, \quad \bar{d}_{9,6} = x_3^3 / d_9, \quad \bar{d}_{9,7} = (6x_2 x_3 - 6x_2^2) / d_9, \quad \bar{d}_{9,8} = (2x_2 x_3 y_2 - 2x_2 x_3 y_3) / d_9,$$

$$\bar{d}_{9,9} = (2x_2 x_3^2 - 3x_2^2 x_3) / d_9, \quad \bar{d}_{9,10} = (x_3^3 y_2 - 2x_2 x_3^2 y_3 + 3x_2^2 x_3 y_3 - 2x_2 x_3^2 y_2) / d_9.$$

Принимая во внимание формулы (15)–(18), из равенств (8) и (10) составим систему уравнений относительно переменных α_6^s и α_{10}^s . Решая эту систему, определим:

$$\alpha_6^s = \sum_{i=1}^{10} d_{6,i} \bar{w}_i^s, \quad (19)$$

$$\alpha_{10}^s = \sum_{i=1}^{10} d_{10,i} \bar{w}_i^s, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} d = & -32x_2^3 x_3^6 y_2^5 y_3^3 + 34x_2^4 x_3^5 y_2^4 y_3^4 + 24x_2^2 x_3^7 y_2^6 y_3^2 + x_3^9 y_2^8 - 8x_2 x_3^8 y_2^7 y_3 - 72x_2^5 x_3^4 y_2^3 y_3^5 + \\ & + 72x_2^6 x_3^3 y_2^3 y_3^5 + 92x_2^6 x_3^3 y_2^2 y_3^6 - 32x_2^7 x_3^2 y_2 y_3^7 - 144x_2^7 x_3^2 y_2^2 y_3^6 + 72x_2^8 x_3 y_2 y_3^7 - 3x_2^8 x_3 y_3^8, \\ d_{6,1} = & (120x_2^4 x_3^5 y_2^5 y_3 - 24x_2^3 x_3^6 y_2^6 - 96x_2^4 x_3^4 y_2^4 y_3^2 + 120x_2^7 x_3^2 y_2^2 y_3^4 - 120x_2^8 x_3 y_2 y_3^5 - 96x_2^3 x_3^6 y_2^5 y_3 + \\ & + 21x_2^2 x_3^7 y_2^6 + 57x_2^4 x_3^5 y_2^4 y_3^2 - 11x_2^6 x_3^3 y_2^2 y_3^4 - 48x_2^5 x_3^4 y_2^3 y_3^3 + 132x_2^7 x_3^2 y_2 y_3^5 - 36x_2^7 x_3^2 y_2^6 - 9x_2^8 x_3 y_2^6 + \\ & + 48x_2^3 x_3^6 y_2^3 y_3^3 - 99x_2^4 y_2^2 y_3^4 + 24x_2^5 x_3^4 y_2 y_3^6 + 39x_2^4 x_3^5 y_2^2 y_3^4 - 24x_2 x_3^8 y_2^5 y_3^2 + 3x_3^9 y_2^6 + 9x_2^6 x_3^3 y_2^6) / d, \\ d_{6,2} = & (-32x_2^4 x_3^5 y_2^5 y_3^2 + 48x_2^5 x_3^4 y_2^4 y_3^3 - 16x_2^3 x_3^6 y_2^5 y_3^2 + 50x_2^4 x_3^5 y_2^4 y_3^3 + 8x_2^3 x_3^6 y_2^6 y_3 + 80x_2^3 x_3^6 y_2^4 y_3^3 - \\ & - 50x_2^2 x_3^7 y_2^5 y_3^2 + 16x_2 x_3^8 y_2^6 y_3 + 2x_2^2 x_3^7 y_2^6 y_3 - 42x_2^6 x_3^3 y_2 y_3^6 - 68x_2^6 x_3^3 y_2^3 y_3^4 - 80x_2^5 x_3^4 y_2^3 y_3^4 - 82x_2^4 x_3^5 y_2^3 y_3^4 + \\ & + 56x_2^7 x_3^2 y_2^2 y_3^5 - 108x_2^8 x_3 y_2 y_3^6 - 26x_2^6 x_3^3 y_2^2 y_3^5 - 2x_3^9 y_2^7 + 64x_2^7 x_3^2 y_2 y_3^6 + 80x_2^5 x_3^4 y_2^2 y_3^5 + 6x_2^8 x_3 y_3^7) / d, \\ d_{6,3} = & (16x_2^3 x_3^7 y_2^5 y_3 - 50x_2^4 x_3^6 y_2^4 y_3^2 - 16x_2^2 x_3^8 y_2^5 y_3 + 50x_2^3 x_3^7 y_2^4 y_3^2 - 2x_2^2 x_3^8 y_2^6 + \\ & + 2x_2 x_3^9 y_2^6 + 80x_2^5 x_3^5 y_2^3 y_3^3 - 80x_2^4 x_3^6 y_2^3 y_3^3 + 26x_2^6 x_3^4 y_2^2 y_3^4 - 64x_2^7 x_3^3 y_2 y_3^5 + 46x_2^5 x_3^5 y_2^2 y_3^4 - \\ & - 8x_2^6 x_3^4 y_2 y_3^5 - 72x_2^7 x_3^3 y_2^2 y_3^4 + 72x_2^8 x_3^2 y_2 y_3^5 + 6x_2^7 x_3^3 y_3^6 - 6x_2^8 x_3^2 y_3^6) / d, \\ d_{6,4} = & (-120x_2^3 x_3^6 y_2^3 y_3^3 + 109x_2^4 x_3^5 y_2^2 y_3^4 - 48x_2^5 x_3^4 y_2 y_3^5 + 75x_2^2 x_3^7 y_2^4 y_3^2 - 24x_2 x_3^8 y_2^5 y_3 + \\ & + 3x_3^9 y_2^6 + 9x_2^6 x_3^3 y_3^6) / d, \\ d_{6,5} = & (-25x_2^2 x_3^7 y_2^5 y_3^2 + 8x_2 x_3^8 y_2^6 y_3 + 28x_2^3 x_3^6 y_2^4 y_3^3 - 32x_2^5 x_3^4 y_2^2 y_3^5 - 23x_2^4 x_3^5 y_2^3 y_3^4 + \\ & + 12x_2^3 x_3^7 y_2^4 y_3^2 + 33x_2^6 x_3^3 y_2 y_3^6 - x_3^9 y_2^7) / d, \\ d_{6,6} = & (x_2 x_3^9 y_2^6 - 8x_2^2 x_3^8 y_2^5 y_3 + 25x_2^3 x_3^7 y_2^4 y_3^3 + 59x_2^5 x_3^5 y_2^2 y_3^4 - 40x_2^4 x_3^6 y_2^3 y_3^3 - 40x_2^6 x_3^4 y_2 y_3^5 + 3x_2^7 x_3^3 y_3^6) / d, \\ d_{6,7} = & (-144x_2^4 x_3^5 y_2^5 y_3 + 36x_2^3 x_3^6 y_2^6 + 141x_2^5 x_3^4 y_2^4 y_3^2 - 108x_2^7 x_3^2 y_2^2 y_3^4 - 144x_2^6 x_3^3 y_2^3 y_3^3 + 144x_2^8 x_3 y_2 y_3^5 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +24x_2^3x_3^6y_2^5y_3-3x_2^2x_3^7y_2^6+139x_2^6x_3^3y_2^2y_3^4+120x_2^5x_3^4y_2^3y_3^3-96x_2^7x_3^2y_2y_3^5-9x_2^8x_3y_3^6)/d, \\
d_{6,8} & = (36x_2^6x_3^3y_2^3y_3^4-8x_2^3x_3^6y_2^5y_3^2+x_2^2x_3^7y_2^6y_3+25x_2^4x_3^5y_4^3y_3^3-13x_2^6x_3^3y_2^2y_3^5-40x_2^5x_3^4y_2^3y_3^4+ \\
& +32x_2^7x_3^2y_2y_3^6-36x_2^8x_3y_2y_3^6+3x_2^6x_3y_3^7)/d, \\
d_{6,9} & = (8x_2^3x_3^7y_2^5y_3-x_2^2x_3^8y_2^6-25x_2^4x_3^6y_2^4y_3^2+13x_2^6x_3^4y_2^2y_3^4+40x_2^5x_3^5y_2^3y_3^3- \\
& -32x_2^7x_3^3y_2y_3^5+6x_2^3x_3^7y_2^6-72x_2^7x_3^3y_2^2y_3^4+72x_2^8x_3^2y_2y_3^5-6x_2^7x_3^3y_2^6-3x_2^8x_3^2y_2^6)/d, \\
d_{6,10} & = (-3x_2^4x_3^6y_2^5y_3^2-20x_2^3x_3^6y_2^5y_3^3+40x_2^4x_3^5y_2^4y_3^4+5x_2^2x_3^8y_2^6y_3-13x_2^3x_3^7y_2^5y_3^2+25x_2^4x_3^6y_2^4y_3^3+ \\
& +3x_2^4x_3^6y_2^7+4x_2^2x_3^7y_2^6y_3^2-x_2x_3^9y_2^7-36x_2^6x_3^4y_2^3y_3^4-40x_2^5x_3^4y_2^3y_3^5-23x_2^5x_3^5y_2^3y_3^4+72x_2^7x_3^3y_2^2y_3^5- \\
& -36x_2^8x_3^2y_2y_3^6-28x_2^6x_3^3y_2^2y_3^6+44x_2^7x_3^2y_2y_3^7+64x_2^6x_3^4y_2^2y_3^5-51x_2^7x_3^3y_2y_3^6+3x_2^8x_3^2y_3^7)/d, \\
d_{10,1} & = (-120x_2^4x_3^5y_2^{23}y_3^2+12x_2^5x_3^4y_2^2y_3^3+60x_2^5x_3^4y_2^3y_3^2-54x_2^6x_3^3y_2^2y_3^3-34x_2^4x_3^5y_2^4y_3+ \\
& +36x_2^3x_3^6y_2^4y_3-6x_2^2x_3^7y_2^5-18x_2^6x_3^3y_2y_3^4+32x_2^7x_3^2y_2y_3^4-6x_2^8x_3y_3^5+8x_2^4x_3^5y_2^4y_3+x_2^3x_3^6y_2^5+ \\
& +46x_2^4x_3^5y_2y_3^4+120x_2^4x_3^5y_2^2y_3^3-60x_2^5x_3^4y_2y_3^4-36x_2^3x_3^6y_2^3y_3^2+48x_2^2x_3^7y_2^3y_3^2-16x_2x_3^8y_2^4y_3+ \\
& +6x_2^2x_3^7y_2^4y_3+2x_3^9y_2^5-12x_2^5x_3^4y_3^5+18x_2^6x_3^3y_3^5-68x_2^3x_3^6y_2^2y_3^3)/d, \\
d_{10,2} & = (12x_2^5x_3^4y_2^3y_3^3-35x_2^6x_3^3y_2^2y_3^4+32x_2^6x_3^3y_2^3y_3^3-16x_2^7x_3^2y_2^2y_3^4-24x_2^5x_3^4y_2^4y_3^2+7x_2^4x_3^5y_2^4y_3^2- \\
& -40x_2^3x_3^6y_2^3y_3^3+35x_2^4x_3^5y_2^2y_3^4-18x_2^4x_3^5y_2^3y_3^3+8x_2^5x_3^4y_2^2y_3^4+25x_2^2x_3^7y_2^4y_3^2-8x_2x_3^8y_2^5y_3+2x_2^6x_3^3y_2^6+ \\
& +x_3^9y_3^6+24x_2^7x_3^2y_2y_3^5-3x_2^8x_3y_3^6-16x_2^5x_3^4y_2y_3^5-3x_2^2x_3^7y_2^6+3x_2^6x_3^3y_3^6)/d, \\
d_{10,3} & = (44x_2^4x_3^6y_2^2y_3^3-26x_2^5x_3^5y_2y_3^4-88x_2^5x_3^5y_2^2y_3^3+52x_2^6x_3^4y_2y_3^4+72x_2^4x_3^6y_2^3y_3^2-36x_2^3x_3^7y_2^3y_3^2+ \\
& +14x_2^2x_3^8y_2^4y_3+6x_2^6x_3^4y_3^5-12x_2^7x_3^3y_3^5-36x_2^5x_3^5y_2^3y_3^2+44x_2^6x_3^4y_2^2y_3^3+14x_2^4x_3^6y_2^4y_3- \\
& -28x_2^3x_3^7y_2^4y_3+4x_2^2x_3^8y_2^5-26x_2^7x_3^3y_2y_3^4+6x_2^8x_3^2y_3^5-2x_2^3x_3^7y_2^5-2x_2^6x_3^4y_2^5)/d, \\
d_{10,4} & = (68x_2^3x_3^6y_2^2y_3^3-46x_2^4x_3^5y_2y_3^4-72x_2^4x_3^5y_2^2y_3^3+60x_2^5x_3^4y_2y_3^4+36x_2^3x_3^6y_2^3y_3^2- \\
& -48x_2^2x_3^7y_2^3y_3^2+16x_2x_3^8y_2^4y_3-6x_2^3x_3^7y_2^4y_3-24x_3^9y_2^5+12x_2^5x_3^4y_3^5-18x_2^6x_3^3y_3^5)/d, \\
d_{10,5} & = (23x_2^2x_3^7y_2^4y_3^2-8x_2x_3^8y_2^5y_3-28x_2^3x_3^6y_2^3y_3^3-20x_2^5x_3^4y_2^2y_3^4+24x_2^4x_3^5y_2^3y_3^3-12x_2^3x_3^6y_2^4y_3^2+ \\
& 4x_2^5x_3^4y_2^4y_3^5+11x_2^4x_3^5y_2^2y_3^4+6x_2^6x_3^3y_2y_3^5-3x_2^6x_3^3y_3^6+x_3^9y_2^6+2x_2^2x_3^7y_2^5y_3)/d, \\
d_{10,6} & = (24x_2^4x_3^6y_2^2y_3^3-20x_2^5x_3^5y_2y_3^4-24x_2^5x_3^5y_2^2y_3^3+20x_2^6x_3^4y_2y_3^4+12x_2^4x_3^6y_2^3y_3^2- \\
& -12x_2^3x_3^7y_2^3y_3^2+2x_2^2x_3^8y_3^4y_3-2x_2^3x_3^7y_2^4y_3+6x_2^6x_3^4y_3^5-6x_2^7x_3^3y_3^5)/d, \\
d_{10,7} & = (112x_2^6x_3^3y_2^2y_3^3-32x_2^7x_3^2y_2y_3^4-72x_3^7y_2^2y_2^2y_3^3+144x_2^6x_3^3y_2^3y_3^2-180x_2^5x_3^4y_2^3y_3^2+ \\
& -72x_2^5x_3^4y_2^4y_3-28x_2^3x_3^6y_2^5+66x_3^4y_2^5y_2^3y_3^2-60x_2^5x_3^4y_2^3y_3^3-72x_2^5x_3^4y_2^4y_3- \\
& -36x_2^3x_3^6y_2^4y_3+6x_3^2y_2^7y_2^5+18x_2^6x_3^3y_2y_3^4+6x_2^8x_3y_3^5+6x_2^4x_3^5y_2^5)/d, \\
d_{10,8} & = (-30x_2^4x_3^5y_2^3y_3^3+20x_2^5x_3^4y_2^2y_3^4+20x_2^5x_3^4y_2^3y_3^3-29x_2^6x_3^3y_2^2y_3^4-x_2^4x_3^5y_2^4y_3^2+12x_2^2x_3^7y_2^5y_3- \\
& -6x_2^6x_3^3y_2y_3^5+16x_2^7x_3^2y_2y_3^5-3x_2^8x_3y_3^6-4x_2^3x_3^6y_2^5y_3+x_2^2x_3^7y_2^6+6x_2^4x_3^5y_2^5y_3)/d, \\
d_{10,9} & = (20x_2^6x_3^4y_2^2y_3^3-6x_2^7x_3^3y_2y_3^4-24x_2^5x_3^5y_2^3y_3^2+12x_2^4x_3^6y_2^4y_3-2x_2^3x_3^7y_2^5+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 24x_2^4x_3^6y_2^3y_3^2 - 20x_2^5x_3^5y_2^2y_3^3 - 12x_2^3x_3^7y_2^4y_3 + 2x_2^2x_3^8y_2^5 + 6x_2^6x_3^4y_2y_3^4)/d, \\
d_{10,10} = & (16x_2^5x_3^5y_2^3y_3^3 - 11x_2^6x_3^4y_2^2y_3^4 - 4x_2^6x_3^4y_2^3y_3^3 - 14x_2^4x_3^6y_2^4y_3^2 + 2x_2^3x_3^7y_2^5y_3 + 8x_2^7x_3^3y_2y_3^5 + \\
& + 19x_2^5x_3^5y_2^2y_3^4 - 20x_2^6x_3^4y_2y_3^5 + 8x_2^3x_3^7y_2^4y_3^2 + 8x_2^4x_3^6y_2^3y_3^3 - 6x_2^2x_3^8y_2^5 + x_2^7x_3^3y_2^6 - 3x_2^8x_3^2y_3^6 + \\
& + 6x_2^8x_3^2y_2^5y_3 + 16x_2^3x_3^6y_2^4y_3^3 - 4x_2^7x_3^2y_2^5y_3^2 - 32x_2^4x_3^5y_2^3y_3^4 - 24x_2^6x_3^3y_2^2y_3^5 + 24x_2^5x_3^4y_2^3y_3^4 - \\
& - 8x_2^4x_3^5y_2^4y_3^3 + 4x_2^6x_3^3y_2y_3^6 + 4x_2^8x_3y_2y_3^3 + 16x_2^5x_3^4y_2^2y_3^5 + 8x_2^7x_3^2y_2y_3^6 - 4x_2^7x_3^2y_3^7 + \\
& + x_2^6x_3^4y_2^6 + 2x_2^7x_3^3y_2^5y_3 - 3x_2^8x_3^2y_2^4y_3^2 + 3x_2^7x_3^3y_3^6 - 3x_2^9x_3y_2^4y_3^2)/d.
\end{aligned}$$

Подставляя в (18) значения α_6^s и α_{10}^s соответственно из соотношений (19) и (20), находим

$$\alpha_9^s = \sum_{i=1}^{10} (a_9 d_{6,i} + b_9 d_{10,i} + \bar{d}_{9,i}) \bar{w}_i^s. \quad (21)$$

С учетом соотношений (19)–(21) из равенств (15)–(17) соответственно находим

$$\alpha_4^s = \sum_{i=1}^{10} \left(-\frac{y_3^2}{x_3^2} d_{6,i} + \bar{d}_{4,i} \right) \bar{w}_i^s, \quad (22)$$

$$\alpha_7^s = \sum_{i=1}^{10} (a_7 d_{6,i} + b_7 d_{10,i} + \bar{d}_{7,i}) \bar{w}_i^s, \quad (23)$$

$$\alpha_8^s = \sum_{i=1}^{10} (a_8 d_{6,i} + b_8 d_{10,i} + \bar{d}_{8,i}) \bar{w}_i^s, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned}
a_7 = \frac{2y_3^2}{x_3^3} + \frac{y_3^2}{x_3^2} a_9, \quad b_7 = \frac{2y_3^2}{x_3^3} + \frac{y_3^2}{x_3^2} b_9, \quad a_8 = -\frac{2y_3}{x_3^2} - \frac{y_3}{x_3} a_9, \quad b_8 = -\frac{2y_3}{x_3^2} - \frac{y_3}{x_3} b_9, \\
\bar{d}_{4,i} = 0, i \in \{4, 5, 6\}, \quad \bar{d}_{4,1} = -\frac{3}{x_3^2}, \quad \bar{d}_{4,2} = -\frac{2y_3}{x_3^2}, \quad \bar{d}_{4,3} = \frac{2}{x_3}, \quad \bar{d}_{4,7} = \frac{3}{x_3^2}, \quad \bar{d}_{4,8} = -\frac{y_3}{x_3^2}, \\
\bar{d}_{4,9} = \frac{1}{x_3}, \quad \bar{d}_{4,10} = -\frac{y_3}{x_3}, \quad \bar{d}_{7,1} = \frac{2}{x_3^3} + \frac{y_3^2}{x_3^2} \bar{d}_{9,1}, \quad \bar{d}_{7,2} = \frac{2y_3}{x_3^3} + \frac{y_3^2}{x_3^2} \bar{d}_{9,2}, \\
\bar{d}_{7,3} = -\frac{1}{x_3^2} + \frac{y_3^2}{x_3^2} \bar{d}_{9,3}, \quad \bar{d}_{7,4} = 0, \quad \bar{d}_{7,5} = 0, \quad \bar{d}_{7,6} = 0, \quad \bar{d}_{7,7} = -\frac{2}{x_3^3} + \frac{y_3^2}{x_3^2} \bar{d}_{9,7}, \\
\bar{d}_{7,8} = \frac{y_3^2}{x_3^2} \bar{d}_{9,8}, \quad \bar{d}_{7,9} = -\frac{1}{x_3^2} + \frac{y_3^2}{x_3^2} \bar{d}_{9,9}, \quad \bar{d}_{7,10} = \frac{y_3}{x_3^2} + \frac{y_3^2}{x_3^2} \bar{d}_{9,10}, \quad \bar{d}_{8,1} = -\frac{2y_3}{x_3} \bar{d}_{9,1}, \\
\bar{d}_{8,2} = -\frac{1}{x_3^2} - \frac{2y_3}{x_3} \bar{d}_{9,2}, \quad \bar{d}_{8,3} = -\frac{2y_3}{x_3} \bar{d}_{9,3}, \quad \bar{d}_{8,4} = 0, \quad \bar{d}_{8,5} = 0, \quad \bar{d}_{8,6} = -\frac{2y_3}{x_3} \bar{d}_{9,6}, \\
\bar{d}_{8,7} = -\frac{2y_3}{x_3} \bar{d}_{9,7}, \quad \bar{d}_{8,8} = \frac{1}{x_3^2} - \frac{2y_3}{x_3} \bar{d}_{9,8}, \quad \bar{d}_{8,9} = -\frac{2y_3}{x_3} \bar{d}_{9,9}, \quad \bar{d}_{8,10} = -\frac{1}{x_3} - \frac{2y_3}{x_3} \bar{d}_{9,10}.
\end{aligned}$$

Таким образом, при дополнении треугольного элемента пластины десятой степенью свободы, в качестве которой использован угол сдвига в узле, находящемся в начале координат, неизвестные параметры $\alpha_i^s, i \in \{1, 2, \dots, 10\}$ определяются соотношениями (5)–(7), (14), (19)–(24).

Исходя из связей (1), выражение для каждой j -й функции Эрмита $\Phi_j(x, y)$ ищем в виде

$$\Phi_j^s(x, y) = \alpha_{1j}^s + \alpha_{2j}^s x + \alpha_{3j}^s y + \alpha_{4j}^s x^2 + \alpha_{5j}^s xy + \alpha_{6j}^s y^2 + \alpha_{7j}^s x^3 + \alpha_{8j}^s x^2 y + \alpha_{9j}^s xy^2 + \alpha_{10j}^s y^3.$$

Тогда с учетом соотношений (5)–(7), (14), (19)–(24), для функции Эрмита получим

$$\begin{aligned}
\Phi_1^s(x, y) &= 1 - \left(\frac{y_3^2}{x_3^2} d_{6,1} + \frac{3}{x_3^2}\right) x^2 + d_{6,1} y^2 + (a_7 d_{6,1} + b_7 d_{10,1} + \bar{d}_{7,1}) x^3 + \\
&\quad + (a_8 d_{6,1} + b_8 d_{10,1} + \bar{d}_{8,1}) x^2 y + (a_9 d_{6,1} + b_9 d_{10,1} + \bar{d}_{9,1}) x y^2 + d_{10,1} y^3, \\
\Phi_2^s(x, y) &= y - \left(\frac{y_3^2}{x_3^2} d_{6,2} + \frac{2y_3}{x_3^2}\right) x^2 + d_{6,2} y^2 + (a_7 d_{6,2} + b_7 d_{10,2} + \bar{d}_{7,2}) x^3 + \\
&\quad + (a_8 d_{6,2} + b_8 d_{10,2} + \bar{d}_{8,2}) x^2 y + (a_9 d_{6,2} + b_9 d_{10,2} + \bar{d}_{9,2}) x y^2 + d_{10,2} y^3, \\
\Phi_3^s(x, y) &= -x - \left(\frac{y_3^2}{x_3^2} d_{6,3} - \frac{2}{x_3}\right) x^2 + d_{6,3} y^2 + (a_7 d_{6,3} + b_7 d_{10,3} + \bar{d}_{7,3}) x^3 + \\
&\quad + (a_8 d_{6,3} + b_8 d_{10,3} + \bar{d}_{8,3}) x^2 y + (a_9 d_{6,3} + b_9 d_{10,3} + \bar{d}_{9,3}) x y^2 + d_{10,3} y^3, \\
\Phi_4^s(x, y) &= -\frac{y_3^2}{x_3^2} d_{6,4} x^2 + d_{6,4} y^2 + (a_7 d_{6,4} + b_7 d_{10,4}) x^3 + (a_8 d_{6,4} + b_8 d_{10,4}) x^2 y + \\
&\quad + (a_9 d_{6,4} + b_9 d_{10,4}) x y^2 + d_{10,4} y^3, \\
\Phi_5^s(x, y) &= -\frac{y_3^2}{x_3^2} d_{6,5} x^2 + d_{6,5} y^2 + (a_7 d_{6,5} + b_7 d_{10,5}) x^3 + (a_8 d_{6,5} + b_8 d_{10,5}) x^2 y + \\
&\quad + (a_9 d_{6,5} + b_9 d_{10,5}) x y^2 + d_{10,5} y^3, \\
\Phi_6^s(x, y) &= -\frac{y_3^2}{x_3^2} d_{6,6} x^2 + d_{6,6} y^2 + (a_7 d_{6,6} + b_7 d_{10,6}) x^3 + (a_8 d_{6,6} + b_8 d_{10,6} + \bar{d}_{8,6}) x^2 y + \\
&\quad + (a_9 d_{6,6} + b_9 d_{10,6} + \bar{d}_{9,6}) x y^2 + d_{10,6} y^3, \\
\Phi_7^s(x, y) &= -\left(\frac{y_3^2}{x_3^2} d_{6,7} - \frac{3}{x_3^2}\right) x^2 + d_{6,7} y^2 + (a_7 d_{6,7} + b_7 d_{10,7} + \bar{d}_{7,7}) x^3 + \\
&\quad + (a_8 d_{6,7} + b_8 d_{10,7} + \bar{d}_{8,7}) x^2 y + (a_9 d_{6,7} + b_9 d_{10,7} + \bar{d}_{9,7}) x y^2 + d_{10,7} y^3, \\
\Phi_8^s(x, y) &= -\left(\frac{y_3^2}{x_3^2} d_{6,8} + \frac{y_3}{x_3^2}\right) x^2 + d_{6,8} y^2 + (a_7 d_{6,8} + b_7 d_{10,8} + \bar{d}_{7,8}) x^3 + \\
&\quad + (a_8 d_{6,8} + b_8 d_{10,8} + \bar{d}_{8,8}) x^2 y + (a_9 d_{6,8} + b_9 d_{10,8} + \bar{d}_{9,8}) x y^2 + d_{10,8} y^3, \\
\Phi_9^s(x, y) &= -\left(\frac{y_3^2}{x_3^2} d_{6,9} + \frac{1}{x_3}\right) x^2 + d_{6,9} y^2 + (a_7 d_{6,9} + b_7 d_{10,9} + \bar{d}_{7,9}) x^3 + \\
&\quad + (a_8 d_{6,9} + b_8 d_{10,9} + \bar{d}_{8,9}) x^2 y + (a_9 d_{6,9} + b_9 d_{10,9} + \bar{d}_{9,9}) x y^2 + d_{10,9} y^3, \\
\Phi_{10}^s(x, y) &= -\left(\frac{y_3^2}{x_3^2} d_{6,10} + \frac{y_3}{x_3}\right) x^2 + x y + d_{6,10} y^2 + (a_7 d_{6,10} + b_7 d_{10,10} + \bar{d}_{7,10}) x^3 + \\
&\quad + (a_8 d_{6,10} + b_8 d_{10,10} + \bar{d}_{8,10}) x^2 y + (a_9 d_{6,10} + b_9 d_{10,10} + \bar{d}_{9,10}) x y^2 + d_{10,10} y^3.
\end{aligned} \tag{25}$$

Потенциальная энергия деформации s -го элемента при изгибе пластин определяется выражением [3]

$$\Omega^s = \frac{D}{2} \iint_F \left\{ [\nabla^2 \bar{w}^s(x, y)]^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{w}^s}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \bar{w}^s}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{w}^s}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy, \quad (26)$$

где F - площадь срединной поверхности, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, E - модуль упругости, h - толщина плиты, ν - коэффициент Пуассона.

Подставляя значения $\bar{w}^s(x, y)$ из выражения (2) в (26), потенциальную энергию изгиба s -го элемента пластины представим в виде

$$\Omega^s = 0,5(\bar{w}^s)^T k^s \bar{w}^s, \quad (27)$$

где $k^s = D \|\bar{k}_{ij}^s\| / 2F$ - матрица жесткости, компоненты которой для приведенного на рис.1 треугольного конечного элемента определяются формулой

$$\bar{k}_{ij}^s = \iint_F \left\{ \nabla^2 \Phi_i^s \nabla^2 \Phi_j^s + 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 \Phi_i^s}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi_j^s}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_i^s}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi_j^s}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_i^s}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi_j^s}{\partial x^2} \right] \right\} dx dy. \quad (28)$$

Из схематического изображения треугольного конечного элемента пластины, приведенной на рис.1, соответственно получатся изображения приведенные на рисунках 4–5 при условиях

$$x_2 = x_3 = a, y_2 = b, y_3 = 0, \quad \text{для рис. 2,} \quad (29)$$

$$x_2 = 0, x_3 = a, y_2 = b, y_3 = b, \quad \text{для рис. 3,} \quad (30)$$

$$x_2 = 0, x_3 = a, y_2 = b, y_3 = 0, \quad \text{для рис. 4 и рис. 5.} \quad (31)$$

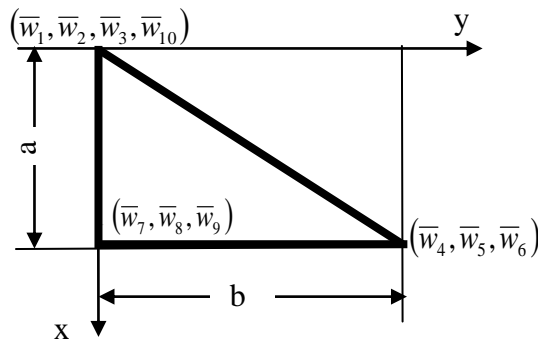


Рис. 2. Схематическое изображение треугольного конечного элемента пластины (первый вид элемента)

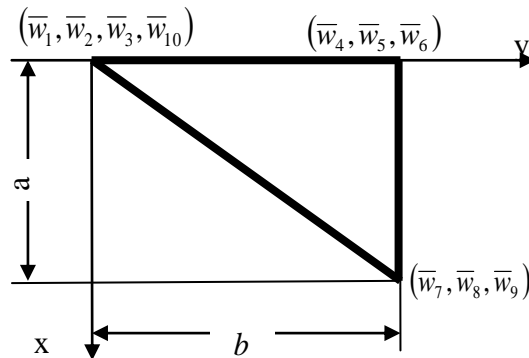


Рис. 3. Схематическое изображение треугольного конечного элемента пластины (второй вид элемента)

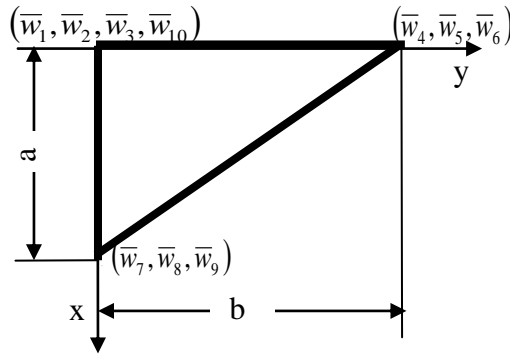


Рис. 4. Схематическое изображение треугольного конечного элемента пластины (третий вид элемента)

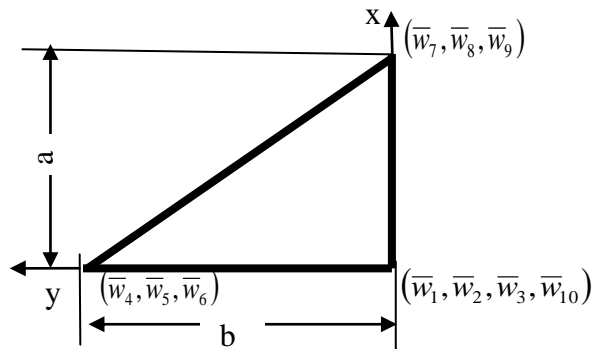


Рис. 5. Схематическое изображение треугольного конечного элемента пластины (четвертый вид элемента)

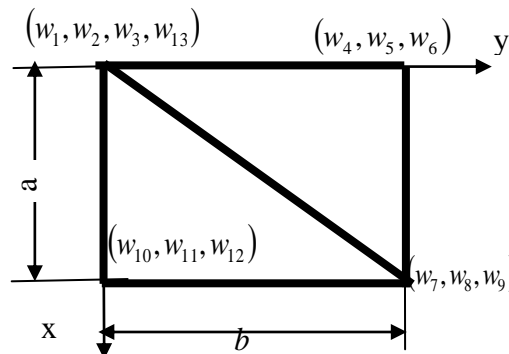


Рис. 6. Схематическое изображение прямоугольного конечного элемента пластины

Исходя из формул (25) и (28), с учетом связей (29)–(31) находим соответствующие значения функции Эрмита и компонент матриц жесткостей для треугольных конечных элементов пластины, схематические изображенных на рис. 2–5. Эти значения приведены в работах [1] и [2].

Рассмотрим прямоугольный элемент, сформированной из треугольных элементов, приведенных на рис.2 и рис. 3. Узловые значения обобщенных перемещений для s -ого прямоугольного конечного элемента в плоскости xu зададим вектором $w^s = (w_1^s, w_2^s, \dots, w_{13}^s)^T$. Пользуясь значениями функции Эрмита и компонент матриц жесткостей для треугольных конечных элементов пластины,

схематические изображенных на рис. 2 и 3, находим значения функции Эрмита и компонент матрицы жесткости $k^s = D \|k_{ij}^s\| / ab$ прямоугольного элемента, схематически изображенного на рис. 6.

При $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ функции Эрмита определяются формулами:

$$\begin{aligned}
\Phi_1^s(\xi, \eta) &= 2 - 3\eta^2 + 2\eta^3 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \\
\Phi_2^s(\xi, \eta) &= b(2\eta - 4\eta^2 - \xi^2\eta + 2\xi\eta^2 + \eta^3), \\
\Phi_3^s(\xi, \eta) &= a(-2\xi + 4\xi^2 - 2\xi^2\eta + \xi\eta^2 - \xi^3), \\
\Phi_4^s(\xi, \eta) &= -3\xi^2 + 3\eta^2 + 2\xi^3 - 2\eta^3, \\
\Phi_5^s(\xi, \eta) &= b(\xi^2 - \eta^2 - \xi^2\eta + \eta^3), \\
\Phi_6^s(\xi, \eta) &= a(-\xi^3 + 2\xi^2\eta - \xi\eta^2), \\
\Phi_7^s(\xi, \eta) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 + 3\eta^2 - 2\eta^3, \\
\Phi_8^s(\xi, \eta) &= b(-\xi^2 + \xi^2\eta - \eta^2 + \eta^3), \\
\Phi_9^s(\xi, \eta) &= a(\xi^2 - \xi^3 + \eta^2 - \xi\eta^2), \\
\Phi_{10}^s(\xi, \eta) &= 3\xi^2 - 3\eta^2 - 2\xi^3 + 2\eta^3, \\
\Phi_{11}^s(\xi, \eta) &= b(\xi^2\eta - 2\xi\eta^2 + \eta^3), \\
\Phi_{12}^s(\xi, \eta) &= a(\xi^2 - \xi^3 - \eta^2 + \xi\eta^2), \\
\Phi_{13}^s(\xi, \eta) &= ab(2\xi\eta - \eta^2 - \xi^2).
\end{aligned} \tag{32}$$

Компоненты матрицы жесткости прямоугольного элемента, схематические изображенные на рис. 6, определяются формулами:

$$\begin{aligned}
k_{11}^s &= k_{44}^s = \frac{6a}{b^3} + \frac{6b}{a^3}, \quad k_{21}^s = \frac{2a}{b^2} - \frac{b^2}{a^3}, \quad k_{22}^s = \frac{7a}{3b} + \frac{2b}{3a} + \frac{b^3}{3a^3}, \quad k_{31}^s = \frac{a^2}{b^3} - \frac{2b}{a^2}, \\
k_{32}^s &= \frac{a^2}{6b^2} + \frac{b^2}{6a^2} - \frac{4\nu}{3}, \quad k_{33}^s = \frac{a^3}{3b^3} + \frac{2a}{3b} + \frac{7b}{3a}, \quad k_{41}^s = -\frac{6a}{b^3}, \quad k_{42}^s = -\frac{2a}{b^3} + \frac{\nu}{a}, \\
k_{43}^s &= -\frac{a^2}{b^3} - \frac{2b}{a^2}, \quad k_{51}^s = \frac{4a}{b^2}, \quad k_{52}^s = \frac{a}{b} - \frac{b\nu}{3a}, \quad k_{53}^s = \frac{5a^2}{6b^2} + \frac{2b^2}{3a^2} + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{3}, \\
k_{54}^s &= -\frac{4a}{b^2} - \frac{b^2}{a^3} - \frac{\nu}{a}, \quad k_{55}^s = \frac{3a}{b} + \frac{2b}{3a} + \frac{b^3}{3a^3}, \quad k_{61}^s = -\frac{a^2}{b^3} + \frac{\nu}{b}, \quad k_{62}^s = -\frac{a^2}{6b^2} + \frac{\nu}{6}, \\
k_{63}^s &= -\frac{2a}{3b} + \frac{b}{3a} - \frac{a^3}{b^3} + \frac{a\nu}{3b}, \quad k_{64}^s = \frac{a^2}{b^3} - \frac{2b}{a^2} - \frac{\nu}{3}, \quad k_{65}^s = -\frac{5a^2}{6b^2} + \frac{b^2}{6a^2} - \frac{1}{3} + \nu, \\
k_{66}^s &= \frac{2a}{3b} + \frac{b}{a} + \frac{a^3}{b^3} - \frac{2a\nu}{3b}, \quad k_{71}^s = 0, \quad k_{72}^s = -\frac{2a}{b^2} - \frac{\nu}{a}, \quad k_{73}^s = \frac{2b}{a^2} + \frac{\nu}{b}, \\
k_{74}^s &= -k_{77}^s = \frac{6a}{b^3} - \frac{6b}{a^3}, \quad k_{75}^s = -\frac{2a}{b^2} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{\nu}{a}, \quad k_{76}^s = \frac{a^2}{b^3} + \frac{2b}{a^2}, \quad k_{81}^s = \frac{\nu}{a}, \\
k_{82}^s &= \frac{a}{3b}, \quad k_{83}^s = -\frac{2b^2}{3a^2} - \frac{\nu}{3} - \frac{1}{3}, \quad k_{84}^s = -\frac{2a}{b^2} + \frac{b^2}{a^3}, \quad k_{85}^s = \frac{a}{b} - \frac{2b}{3a} - \frac{b^3}{3a^3} + \frac{b\nu}{3a},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{86}^s &= \frac{1}{3} - \frac{a^2}{6b^2} - \frac{b^2}{6a^2} - \frac{\nu}{6}, k_{87}^s = \frac{2a}{b^2} - \frac{b^2}{a^3} - \frac{\nu}{a}, k_{88}^s = \frac{2a}{3b} + \frac{2b}{3a} + \frac{b^3}{3a^3} - \frac{b\nu}{3a}, \\
k_{91}^s &= -\frac{\nu}{b}, k_{92}^s = -\frac{1}{3} - \frac{2a^2}{3b^2} - \frac{\nu}{3}, k_{93}^s = \frac{b}{3a}, k_{94}^s = -\frac{2b}{a^2} + \frac{a^2}{b^3} + \frac{\nu}{b}, \\
k_{95}^s &= -\frac{a^2}{6b^2} + \frac{b^2}{6a^2} - \frac{\nu}{2}, k_{96}^s = \frac{2a}{3b} + \frac{2b}{3a} + \frac{a^3}{3b^3} - \frac{a\nu}{3b}, k_{97}^s = -\frac{a^2}{b^3} + \frac{2b}{a^2}, \\
k_{98}^s &= \frac{1}{3} - \frac{a^2}{6b^2} - \frac{b^2}{6a^2} - \frac{\nu}{6}, k_{99}^s = -\frac{2a}{3b} + \frac{b}{a} - \frac{a^3}{3b^3} + \frac{a\nu}{3b}, k_{101}^s = -\frac{6b}{a^3}, k_{102}^s = \frac{2a}{b^2} + \frac{b^2}{a^3}, \\
k_{103}^s &= \frac{2b}{a^2} - \frac{\nu}{b}, k_{104}^s = k_{105}^s = k_{106}^s = 0, k_{107}^s = -\frac{6a}{b^3}, k_{108}^s = \frac{2a}{b^2} - \frac{\nu}{a}, k_{109}^s = -\frac{a^2}{b^3}, \\
k_{1010}^s &= \frac{6a}{b^3} + \frac{6b}{a^3}, k_{111}^s = \frac{b^2}{a^3} - \frac{\nu}{a}, k_{112}^s = \frac{a}{3b} - \frac{2b}{3a} - \frac{b^3}{3a^3} + \frac{b\nu}{3a}, k_{113}^s = \frac{b^2}{6a^2} + \frac{\nu}{6}, \\
k_{114}^s &= k_{115}^s = k_{116}^s = 0, k_{117}^s = -\frac{2a}{b^2}, k_{118}^s = \frac{2a}{3b} + \frac{b\nu}{3a}, k_{119}^s = \frac{1}{3} - \frac{a^2}{6b^2} - \frac{\nu}{6}, \\
k_{1110}^s &= \frac{2a}{b^2} - \frac{b^2}{a^3} + \frac{\nu}{a}, k_{1111}^s = \frac{a}{b} + \frac{2b}{3a} - \frac{b^3}{3a^3} - \frac{2b\nu}{3a}, k_{121}^s = -\frac{4b}{a^2}, \\
k_{122}^s &= \frac{2a^2}{3b^2} + \frac{5b^2}{6a^2} + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{3}, k_{123}^s = \frac{b}{a} - \frac{a\nu}{3b}, k_{124}^s = k_{125}^s = k_{126}^s = 0, k_{127}^s = -\frac{a^2}{b^3} - \frac{\nu}{b}, \\
k_{128}^s &= \frac{a^2}{6b^2} - \frac{\nu}{2}, k_{129}^s = -\frac{2a}{3b} - \frac{a^3}{3b^3} + \frac{a\nu}{3b}, k_{1210}^s = \frac{4b}{a^2} + \frac{a^2}{b^3} + \frac{\nu}{b}, \\
k_{1211}^s &= -\frac{1}{3} + \frac{a^2}{6b^2} - \frac{5b^2}{6a^2} + \nu, k_{1212}^s = \frac{a^3}{3b^3} + \frac{2a}{3b} + \frac{3b}{a}, k_{131}^s = -\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}, \\
k_{132}^s &= \frac{b}{3} + \frac{a^2}{2b} + \frac{b^3}{3a^2} + \frac{b\nu}{2}, k_{133}^s = -\frac{a}{3} - \frac{a^3}{3b^2} - \frac{b^2}{2a} - \frac{a\nu}{2}, \\
k_{134}^s &= k_{1310}^s = -k_{137}^s = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}, k_{135}^s = -\frac{b}{3} - \frac{5a^2}{6b} - \frac{b^3}{3a^2} - \frac{b\nu}{6}, \\
k_{136}^s &= \frac{a}{3} + \frac{a^3}{3b^3} + \frac{b^2}{6a} - \frac{a\nu}{6}, k_{138}^s = \frac{b}{3} + \frac{a^2}{6b} + \frac{b^3}{3a^2} - \frac{b\nu}{2}, \\
k_{139}^s &= -\frac{a}{3} - \frac{a^3}{3b^2} - \frac{b^2}{6a} + \frac{a\nu}{2}, k_{1311}^s = -\frac{b}{3} + \frac{a^2}{6b} - \frac{b^3}{3a^2} + \frac{b\nu}{6}, \\
k_{1312}^s &= \frac{a}{3} + \frac{a^3}{3b^2} + \frac{5b^2}{6a} + \frac{a\nu}{6}, k_{1313}^s = \frac{2ab}{3} + \frac{2a^3}{3b} + \frac{2b^3}{3a}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Обозначим через $P^s = (P_1^s, P_2^s, \dots, P_{13}^s)^T$ – вектор узловых нагрузок, эквивалентный внешней нагрузке. Действие распределенной внешней нагрузки интенсивностью $q(x, y)$ на поверхность конечного элемента можно заменить совокупностью эквивалентных узловых сил:

$$P^s = \int_F q(x, y) \Phi^s(x, y) dx dy.$$

Откуда, с учетом связей (25), (29)–(31), в случае равномерно распределенной нагрузки q , предположив, что в пределах площади конечного элемента $q(x, y) = q = const$ находим соответствующие значения векторов узловых нагрузок для треугольных конечных элементов пластины, схематические изображенные на рис. 2 и 3 [1,2]. На основе этих значений находим вектор узловых нагрузок для прямоугольного элемента, схематически изображенного на рис. 6.

$$P^s = \frac{qab}{2} \left(\frac{2}{5}, 0, 0, \frac{2}{5}, -\frac{b}{15}, -\frac{a}{30}, \frac{2}{5}, -\frac{b}{10}, \frac{a}{10}, \frac{2}{5}, \frac{b}{30}, \frac{a}{15}, \frac{ab}{30} \right)^T. \quad (34)$$

Работа узловых нагрузок s -го прямоугольного конечного элемента пластины задается формулой

$$\hat{\Omega}^s = (w^s)^T P^s. \quad (35)$$

Принимая во внимание формулы (27) и (35), находим потенциальную энергию системы для s -го прямоугольного конечного элемента, схематически изображенного на рис. 6 :

$$\Omega^s = 0,5(w^s)^T k^s w^s - (w^s)^T P^s. \quad (36)$$

Срединную плоскость пластины представим в виде совокупности n конечных элементов прямоугольных форм. Тогда, исходя из принципа минимума потенциальной энергии системы для определения искомых векторов $w^s, s \in \{1, 2, \dots, n\}$, получим следующую задачу квадратичного программирования:

$$\min \left\{ \sum_{s=1}^n (0,5(w^s)^T k^s w^s - (w^s)^T P^s) \mid \text{краевые условия} \right\}. \quad (37)$$

При изгибе пластин изгибающие, крутящие моменты и перерезывающие силы задаются формулами [4]:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (38)$$

$$N_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad N_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (39)$$

Принимая во внимание соотношения (2) и (32), из формул (39) находим перерезывающие силы, которые во всех узлах имеют одинаковые значения и определяются соотношениями:

$$N_x^s = 12D[2a(w_3^s + w_6^s + w_9^s + w_{12}^s) - (w_1^s + w_4^s - w_7^s - w_{10}^s)]/a^3 + \\ + 4D(2 - \nu)[a(w_6^s + w_9^s - w_3^s - w_{12}^s) + 2b(w_{11}^s - w_2^s)]/ab^2, \quad (40)$$

$$N_y^s = 12D[-2b(w_2^s + w_5^s + w_8^s + w_{11}^s) - (w_1^s - w_4^s + w_7^s - w_{10}^s)]/b^3 + \\ + 4D(2 - \nu)[b(w_2^s + w_5^s - w_8^s - w_{11}^s) + 2a(w_3^s - w_6^s)]/a^2b. \quad (41)$$

Узловые значения изгибающих и крутящих моментов $M_i^s = (M_{x,i}^s, M_{y,i}^s, M_{xy,i}^s)^T, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ для s -го прямоугольного конечного элемента обозначим вектором $M^s = (M_1^s, M_2^s, \dots, M_{12}^s)^T$. Принимая во внимание соотношения (2) и (32), из формул изгибающих и крутящих моментов (38) находим:

$$M^s = \delta^s w^s, \quad (42)$$

где δ^s - матрица изгибающих и крутящих моментов, для которой при $\bar{\nu} = 1 - \nu$ имеем:

$$\delta^s = -D \begin{vmatrix} \frac{6}{a^2} - \frac{6\nu}{b^2} & -\frac{8\nu}{b} & \frac{8}{a} & -\frac{6}{a^2} + \frac{6\nu}{b^2} & \frac{b}{a^2} - \frac{2\nu}{b} & 0 & \frac{6}{a^2} + \frac{6\nu}{b^2} & -\frac{2b}{a^2} - \frac{2\nu}{b} & \frac{2}{a} + \frac{a\nu}{b^2} & \frac{6}{a^2} - \frac{6\nu}{b^2} & 0 & \frac{2}{a} - \frac{2a\nu}{b^2} & -\frac{2b}{a} - \frac{2a\nu}{b} \\ \frac{6}{b^2} - \frac{6\nu}{a^2} & \frac{8}{b} & \frac{8\nu}{a} & \frac{6}{b^2} - \frac{6\nu}{a^2} & \frac{b}{b^2} + \frac{2\nu}{a^2} & 0 & \frac{6}{b^2} - \frac{6\nu}{a^2} & -\frac{2}{b} - \frac{2b\nu}{a^2} & \frac{2}{b^2} + \frac{a\nu}{a} & -\frac{6}{b^2} + \frac{6\nu}{a^2} & 0 & -\frac{2a}{b^2} + \frac{2\nu}{a} & -\frac{2a}{b} - \frac{2b\nu}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{a^2} + \frac{6\nu}{b^2} & -\frac{2b}{a^2} - \frac{2\nu}{b} & \frac{4}{a} & -\frac{6}{a^2} - \frac{6\nu}{b^2} & -\frac{b}{a^2} + \frac{4\nu}{b} & \frac{4}{a} & \frac{6}{a^2} - \frac{6\nu}{b^2} & \frac{4\nu}{b} & \frac{2}{a} + \frac{a\nu}{b^2} & \frac{6}{a^2} + \frac{6\nu}{b^2} & \frac{2b}{a^2} + \frac{6\nu}{b} & \frac{2}{a} - \frac{2a\nu}{b^2} & -\frac{2b}{a} - \frac{2a\nu}{b} \\ \frac{6}{b^2} - \frac{6\nu}{a^2} & \frac{2}{b} - \frac{2b\nu}{a^2} & \frac{4\nu}{a} & -\frac{6}{b^2} - \frac{6\nu}{a^2} & \frac{4}{b} - \frac{b\nu}{a^2} & \frac{4\nu}{a} & \frac{6}{b^2} - \frac{6\nu}{a^2} & \frac{4}{b} & \frac{2}{b^2} + \frac{a\nu}{a} & \frac{6}{b^2} + \frac{6\nu}{a^2} & \frac{6}{b} + \frac{2b\nu}{a^2} & -\frac{2a}{b^2} + \frac{2\nu}{a} & -\frac{2a}{b} - \frac{2b\nu}{a} \\ \frac{0}{b^2} - \frac{0}{a^2} & \frac{0}{b} - \frac{0}{a^2} & \frac{0}{a} & \frac{0}{b^2} - \frac{0}{a^2} & \frac{0}{b} - \frac{0}{a^2} & \frac{0}{a} & \frac{0}{b^2} - \frac{0}{a^2} & \frac{0}{b} & \frac{0}{b^2} + \frac{0}{a} & \frac{0}{b^2} + \frac{0}{a^2} & \frac{0}{b} + \frac{0}{a^2} & \frac{0}{b^2} + \frac{0}{a} & \frac{0}{b} - \frac{0}{a} \\ 0 & \frac{a}{4\sqrt{v}} & \frac{b}{2\sqrt{v}} & 0 & 0 & -\frac{b}{2\sqrt{v}} & 0 & 0 & -\frac{b}{2\sqrt{v}} & 0 & -\frac{a}{4\sqrt{v}} & \frac{b}{2\sqrt{v}} & \frac{2\sqrt{v}}{b} \\ \frac{6}{a^2} + \frac{6\nu}{b^2} & -\frac{2b}{a^2} + \frac{2\nu}{b} & -\frac{2}{a} + \frac{2a\nu}{b^2} & \frac{6}{a^2} - \frac{6\nu}{b^2} & -\frac{b}{a^2} + \frac{4\nu}{b} & -\frac{2}{a} - \frac{2a\nu}{b^2} & \frac{6}{a^2} - \frac{6\nu}{b^2} & \frac{4\nu}{b} & \frac{4}{a} - \frac{a\nu}{b^2} & -\frac{6}{a^2} + \frac{6\nu}{b^2} & \frac{2b}{a^2} + \frac{2\nu}{b} & -\frac{4}{a} & -\frac{2b}{a} - \frac{2a\nu}{b} \\ \frac{6}{b^2} - \frac{6\nu}{a^2} & \frac{2}{b} - \frac{2b\nu}{a^2} & \frac{2a}{b^2} - \frac{2\nu}{a} & \frac{6}{b^2} - \frac{6\nu}{a^2} & \frac{4}{b} - \frac{b\nu}{a^2} & -\frac{2}{b} - \frac{2b\nu}{a^2} & \frac{6}{b^2} - \frac{6\nu}{a^2} & \frac{4}{b} & -\frac{2}{b^2} - \frac{a\nu}{a} & \frac{6}{b^2} + \frac{6\nu}{a^2} & \frac{2}{b} + \frac{2b\nu}{a^2} & -\frac{4\nu}{b} & -\frac{2a}{b} - \frac{2b\nu}{a} \\ 0 & \frac{2\sqrt{v}}{b} & -\frac{2\sqrt{v}}{a} & 0 & -\frac{2\sqrt{v}}{b} & \frac{2\sqrt{v}}{a} & 0 & \frac{2\sqrt{v}}{b} & -\frac{2\sqrt{v}}{a} & 0 & -\frac{2\sqrt{v}}{b} & \frac{2\sqrt{v}}{a} & \frac{2\sqrt{v}}{b} \\ \frac{6}{a^2} - \frac{6\nu}{b^2} & -\frac{4\nu}{b} & \frac{2}{a} + \frac{2a\nu}{b^2} & \frac{6}{a^2} + \frac{6\nu}{b^2} & \frac{b}{a^2} - \frac{2\nu}{b} & -\frac{6}{a} - \frac{2a\nu}{b^2} & \frac{6}{a^2} + \frac{6\nu}{b^2} & -\frac{2b}{a^2} - \frac{2\nu}{b} & \frac{4}{a} - \frac{a\nu}{b^2} & -\frac{6}{a^2} - \frac{6\nu}{b^2} & \frac{6}{a} - \frac{6\nu}{b^2} & -\frac{4}{a} & -\frac{2b}{a} - \frac{2a\nu}{b} \\ \frac{6}{b^2} - \frac{6\nu}{a^2} & -\frac{4}{b} & \frac{2a}{b^2} + \frac{2\nu}{a} & \frac{6}{b^2} + \frac{6\nu}{a^2} & \frac{2}{b} - \frac{b\nu}{a^2} & -\frac{2a}{b^2} - \frac{6\nu}{a} & \frac{6}{b^2} - \frac{6\nu}{a^2} & \frac{2}{b} - \frac{2b\nu}{a^2} & \frac{4}{a} - \frac{a\nu}{b^2} & -\frac{6}{b^2} - \frac{6\nu}{a^2} & \frac{6}{a} - \frac{6\nu}{b^2} & -\frac{4}{a} & -\frac{2a}{b} - \frac{2b\nu}{a} \\ \frac{0}{a^2} - \frac{0}{b^2} & \frac{0}{b} - \frac{0}{a^2} & \frac{0}{b^2} + \frac{0}{a} & \frac{0}{b^2} - \frac{0}{a^2} & \frac{0}{b} - \frac{0}{a^2} & \frac{0}{b^2} - \frac{0}{a} & \frac{0}{b^2} - \frac{0}{a^2} & \frac{0}{b} & \frac{0}{b^2} - \frac{0}{a} & \frac{0}{b^2} - \frac{0}{a^2} & \frac{0}{b} - \frac{0}{a^2} & \frac{0}{b^2} - \frac{0}{a} & \frac{0}{b} - \frac{0}{a} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{v}}{a} & -\frac{4\sqrt{v}}{b} & 0 & -\frac{2\sqrt{v}}{a} & \frac{4\sqrt{v}}{b} & 0 & \frac{2\sqrt{v}}{a} & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{v}}{a} & 0 & \frac{2\sqrt{v}}{a} \end{vmatrix}$$

Заметим, что прогибы w^s вдоль сторон стыковки прямоугольных конечных элементов изменяются по закону кубической параболы, а углы поворота θ^s , ω^s – квадратичной параболы. Так как узловые значения обобщенных перемещений $f^s = (w^s, \theta^s, \omega^s)^T$ выбраны в качестве основных неизвестных, то они являются общими для элементов, примыкающих к данному узлу. С другой стороны, в направлении линии стыка θ^s и ω^s являются первыми производными прогиба w^s , поэтому вдоль границы разделов любые соседние кромок двух смежных элементов получают одинаковые прогибы.

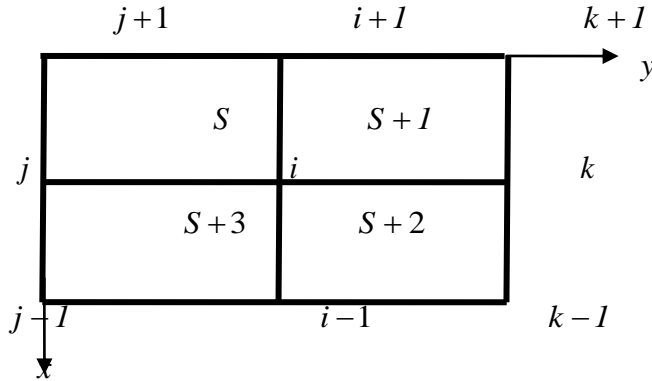


Рис. 7. i -ый узел. Совокупность прямоугольных конечных элементов

Для обеспечения непрерывности углов поворота θ^s , ω^s примем (рис. 7.)

$$\gamma_{xy}^{s+i} = \gamma_{xy}^{s+1+i}, i \in \{0,1,2\}, \gamma_{xy}^{s+3} = \gamma_{xy}^s, \quad (43)$$

где $\gamma^s = \partial^2 w^s / \partial x \partial y$ – угол сдвига.

Подставляя в (43) значения w^s по формуле (2) с учетом связей (32), находим

$$bw_2^{j+1} - aw_3^{j+1} + 3aw_3^{i+1} + bw_2^{k+1} - 2aw_3^{k+1} - bw_2^j + aw_3^j - aw_3^i - bw_3^k + abw_{13}^{j+1} - abw_{13}^{i+1} = 0, \quad (44)$$

$$-bw_2^{i+1} - 2aw_3^{i+1} - bw_2^{k+1} + 2aw_3^{k+1} + bw_2^k + bw_2^i + abw_{13}^{i+1} - abw_{13}^i = 0, \quad (45)$$

$$2bw_2^j + aw_3^j - aw_3^i - aw_3^{i-1} - 2bw_2^{j-1} + aw_3^{j-1} + abw_{13}^j - abw_{13}^i = 0, \quad (46)$$

$$bw_2^{j+1} - aw_3^{j+1} - bw_2^{i+1} + aw_3^{i+1} - 3bw_2^j + bw_2^i + 2bw_2^{j-1} - aw_3^{j-1} + aw_3^{i-1} + abw_{13}^{j+1} - abw_{13}^j = 0. \quad (47)$$

Исключая из уравнений (44) - (47) переменные w_2^i , w_3^i и w_{13}^i , получаем тождество.

Следовательно, условия (43) непрерывности углов поворота θ^s , ω^s тождественно удовлетворяются. Исходя из формул $\gamma^s = \partial^2 w^s / \partial x \partial y$ и (38), мы можем заключить, что здесь тождественно удовлетворяются также и условия непрерывности крутящих моментов вдоль границы разделов двух смежных элементов.

Условия непрерывности изгибающих моментов M_x , M_y в узловых точках (рис. 7) зададим в виде

$$M_x^{s+i} = M_x^{s+1+i}, i \in \{0,1,2\}, M_x^{s+3} = M_x^s, M_y^{s+i} = M_y^{s+1+i}, i \in \{0,1,2\}, M_y^{s+3} = M_y^s \quad (48)$$

и заменим их соотношениями

$$\frac{\partial^2 w^{s+i}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w^{s+1+i}}{\partial x^2}, i \in \{0,1,2\}, \frac{\partial^2 w^{s+3}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w^s}{\partial x^2}, \quad (49)$$

$$\frac{\partial^2 w^{s+i}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w^{s+1+i}}{\partial y^2}, i \in \{0,1,2\}, \frac{\partial^2 w^{s+3}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w^s}{\partial y^2}. \quad (50)$$

С учетом связей (2) и (32) из равенств (49) получим

$$bw_2^{j+1} - aw_3^{j+1} + 3aw_3^{i+1} + bw_2^{k+1} - 2aw_3^{k+1} - bw_2^j + aw_3^j - aw_3^i - bw_2^k + abw_{13}^{j+1} - abw_{13}^i = 0, \quad (51)$$

$$-bw_2^{i+1} - 2aw_3^{i+1} - bw_2^{k+1} + 2aw_3^{k+1} + bw_2^k + bw_2^i + abw_{13}^{i+1} - abw_{13}^i = 0, \quad (52)$$

$$2bw_2^j + aw_3^j - aw_3^i - aw_3^{i-1} - 2bw_2^{j-1} + aw_3^{j-1} + abw_{13}^j - abw_{13}^i = 0, \quad (53)$$

$$bw_2^{j+1} - aw_3^{j+1} - bw_2^{i+1} + aw_3^{i+1} - 3bw_2^j + bw_2^i + 2bw_2^{j-1} - aw_3^{j-1} + aw_3^{i-1} + abw_{13}^{j+1} - abw_{13}^i = 0, \quad (54)$$

а из равенств (5) получим

$$6w_1^{j+1} + 2bw_2^{j+1} + 2aw_3^{j+1} + 8bw_2^{i+1} - 4aw_3^{i+1} - 6w_1^{k+1} + 2bw_2^{k+1} + 2aw_3^{k+1} + 6w_1^j + 2bw_2^j + 8bw_2^i - aw_3^i - 6w_1^k + 2bw_2^k + aw_3^k - 2abw_{13}^{j+1} + 2abw_{13}^{i+1} = 0, \quad (55)$$

$$-6w_1^{i+1} - 4bw_2^{i+1} + 2aw_3^{i+1} + 6w_1^{k+1} - 2bw_2^{k+1} - 2aw_3^{k+1} + 4bw_2^i - aw_3^k - 6w_1^{i-1} + 2aw_3^{i-1} - 6w_1^{k-1} + 2bw_2^{k-1} - aw_3^{k-1} - 2abw_{13}^{i+1} + 2abw_{13}^i = 0, \quad (56)$$

$$-6w_1^j + 2bw_2^j - 12aw_2^i + 6w_1^k - 2bw_2^k - 6w_1^{j-1} + 2aw_3^{j-1} - 6bw_2^{j-1} - 4bw_2^{i-1} - 3aw_3^{i-1} - 6w_1^{k-1} - 2bw_2^{k-1} + aw_3^{k-1} - 2abw_{13}^j + 2abw_{13}^i = 0, \quad (57)$$

$$-6w_1^{j+1} - 2bw_2^{j+1} - 2aw_3^{j+1} + 6w_1^{i+1} - 4bw_2^{i+1} + 2aw_3^{i+1} - 4bw_2^j + aw_3^i + 6w_1^{i-1} + 6bw_2^{j-1} - 2aw_3^{j-1} - 6w_1^{i-1} + 4bw_2^{i-1} + aw_3^{i-1} - 2abw_{13}^j + 2abw_{13}^{i+1} = 0. \quad (58)$$

Исключая из уравнений (51)–(54) переменные w_{13}^{j+1} , w_{13}^{i+1} и w_{13}^j , получаем тождество.

Исключая из уравнений (55)–(58) переменные w_{13}^{j+1} , w_{13}^{i+1} и w_{13}^j , также получаем тождество.

Следовательно, условия (49) и (50) непрерывности изгибающих моментов M_x и M_y в узловых точках тождественно удовлетворяются. Так как изгибающие моменты вдоль сторон

конечного элемента изменяются линейно, то выполняются и условия непрерывности изгибающих моментов вдоль границы разделов двух смежных элементов.

Условия непрерывности перерезывающих сил N_x , N_y в узловых точках (рис. 7) зададим в виде

$$N_x^{s+i} = N_x^{s+1+i}, i \in \{0,1,2\}, N_x^{s+3} = N_x^s, N_y^{s+i} = N_y^{s+1+i}, i \in \{0,1,2\}, N_y^{s+3} = N_y^s, \quad (59)$$

и с учетом формул (39) заменим их соотношениями:

$$\frac{\partial^3 w^{s+i}}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w^{s+1+i}}{\partial x^3}, i \in \{0,1,2\}, \quad \frac{\partial^3 w^{s+3}}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w^s}{\partial x^3}. \quad (60)$$

$$\frac{\partial^3 w^{s+i}}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 w^{s+1+i}}{\partial x \partial y^2}, i \in \{0,1,2\}, \quad \frac{\partial^3 w^{s+3}}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 w^s}{\partial x \partial y^2}. \quad (61)$$

$$\frac{\partial^3 w^{s+i}}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 w^{s+1+i}}{\partial y^3}, i \in \{0,1,2\}, \quad \frac{\partial^3 w^{s+3}}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 w^s}{\partial y^3}. \quad (62)$$

$$\frac{\partial^3 w^{s+i}}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 w^{s+1+i}}{\partial y \partial x^2}, i \in \{0,1,2\}, \quad \frac{\partial^3 w^{s+3}}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 w^s}{\partial y \partial x^2}. \quad (63)$$

С учетом связей (2) и (32) из равенств (60) получим

$$2w_1^{j+1} - aw_3^{j+1} - 2w_1^{k+1} + aw_3^{k+1} - 2w_1^j - aw_3^j + 2w_1^k + aw_3^k = 0, \quad (64)$$

$$2w_2^{i+1} - aw_3^{i+1} + 2w_1^{k+1} - aw_3^{k+1} - 4w_1^i - 4w_1^k + 2w_1^{k-1} + aw_3^{k-1} + 2w_1^{i-1} + aw_3^{i-1} = 0, \quad (65)$$

$$-2w_1^j + aw_3^j + 2w_1^k - aw_3^k + 2w_1^{j-1} + aw_3^{j-1} - 2w_1^{k-1} - aw_3^{k-1} = 0, \quad (66)$$

$$4w_1^j + 4w_1^i - 2w_1^{j-1} - aw_3^{j-1} - 2w_1^{i-1} - aw_3^{i-1} - 2w_1^{j+1} + aw_3^{j+1} - 2w_1^{i+1} + aw_3^{i+1} = 0, \quad (67)$$

а из равенств (61) находим

$$2bw_2^{j+1} + aw_3^{j+1} - 2bw_2^{i+1} - 2aw_3^{i+1} + aw_1^{k+1} - 2bw_2^j + aw_3^j + 2bw_2^i - 2aw_3^i + aw_3^k = 0, \quad (68)$$

$$2bw_2^{i+1} + aw_3^{i+1} - aw_3^{k+1} - 4bw_2^i + aw_3^{k-1} + 2bw_2^{i-1} - aw_3^{i-1} = 0, \quad (69)$$

$$-2bw_2^j - aw_3^j + 2bw_2^i + 2aw_3^i - aw_3^k + 2bw_2^{j-1} - aw_3^{j-1} - 2bw_2^{i-1} + 2aw_3^{i-1} - aw_3^{k-1} = 0, \quad (70)$$

$$-2bw_2^{j+1} - aw_3^{j+1} + aw_3^{i+1} + 4bw_2^j + aw_3^{j-1} - aw_3^{i-1} - 2bw_2^{j-1} = 0. \quad (71)$$

С учетом связей (2) и (32) из равенств (62) получим

$$2w_1^{j+1} + bw_2^{j+1} - 4w_1^{i+1} + 2w_1^{k+1} - bw_2^{k+1} + 2w_1^j + bw_2^j - 4w_1^i + 2w_1^k - bw_2^k = 0, \quad (72)$$

$$2w_1^{i+1} + bw_2^{i+1} - 2w_1^{k+1} + bw_2^{k+1} + 2w_1^{j-1} + bw_2^{j-1} + 2w_1^{k-1} - bw_2^{k-1} = 0, \quad (73)$$

$$-2w_1^j - bw_2^j + 4w_1^i - 2w_1^k + bw_2^k + 4w_1^{i-1} - 2w_1^{j-1} - bw_2^{j-1} - 2w_1^{k-1} + bw_2^{k-1} = 0, \quad (74)$$

$$-2w_1^{j+1} - bw_2^{j+1} + 2w_1^{i+1} - bw_2^{i+1} - 2w_1^{i-1} + bw_2^{i-1} + 2w_1^{j-1} + bw_2^{j-1} = 0, \quad (75)$$

а из равенств (63) находим

$$-bw_2^{j+1} - 2aw_3^{j+1} + 4aw_3^{i+1} + bw_2^{k+1} - 2aw_3^{k+1} + baw_2^j - bw_2^k = 0, \quad (76)$$

$$-bw_2^{i+1} - 2aw_3^{i+1} - bw_3^{k+1} + 2aw_3^{k+1} - bw_2^{i-1} - bw_2^{k-1} + 2bw_2^i + 2aw_3^i + 2bw_2^k - 2aw_3^k = 0, \quad (77)$$

$$bw_2^j + 2aw_3^j - 4aw_3^i - bw_2^k + 2aw_3^k - bw_2^{j-1} + bw_2^{k-1} = 0, \quad (78)$$

$$bw_2^{j+1} + 2aw_3^{j+1} + bw_2^{i+1} - 2aw_3^{i+1} - 2bw_2^j - 2aw_3^j - 2bw_2^i + 2aw_3^i + bw_2^{i-1} + bw_2^{j-1} = 0. \quad (79)$$

Суммируя уравнения (64)–(67), получаем тождество. Соответственно суммируя уравнения (68)–(71), (72)–(75) и (76)–(79), также получаем тождества. Следовательно, условия (60)–(63) непрерывности перерезывающих сил N_x , N_y в узловых точках тождественно удовлетворяются. Так как перерезывающие силы вдоль сторон конечного элемента постоянные, то выполняются и условия непрерывности изгибающих моментов вдоль границы разделов двух смежных элементов.

Таким образом, для прямоугольного конечного элемента аппроксимирующая функция

$$w^s(x, y) = \sum_{i=1}^{13} w_i^s \Phi_i(x, y),$$

в которой $\Phi_i^s(x, y)$ – функции Эрмита, задаваемые соотношениями (32), обеспечивает непрерывность обобщенных перемещений, перерезывающих сил, крутящих и изгибающих моментов.

Գ.Ա. Գևորգյան,
Ն.Վ. Փիրումյան,
Ն.Ռ. Մեհրաբեկյան,
Գ.Ա.Սարգսյան

ՄԱԼԵՐԻ ԾՈՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԵՌԱՆԿՑՈՒՆԱԶԵՎ ԵՎ ՔԱՌԱՆԿՑՈՒՆԱԶԵՎ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՏԱՐԵՐԻ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐԻ ԶԵՎԱՓՈԽՎԱԾ ՏԱՐԲԵՐԱԿՆԵՐ

Առաջարկվում է եռանկյունաձև վերջավոր տարրերի ձևափոխված տարրերակ, որում սալերի ծուկան խնդիրների լուծման ժամանակ որպես տասներորդ ազատության աստիճան օգտագործված է կոորդինատների սկզբնակետում գտնվող հանգույցի սահքի անկյունը: Դիտարկված է տասներեք ազատության աստիճանով ուղղանկյունաձև վերջավոր տարրերի եղանակ:

Առանցքային բառեր. վերջավոր տարրեր, հանգուցային տեղափոխություններ, քառակուսային ծրագրավորում, սալ, ծռում:

G.A. Gevorgyan,
N.V. Pirumyan,
N.R. Mehrabekyan,
G.A. Sargsyan

THE MODIFIED METHODS OF TRIANGULAR AND RECTANGULAR FORMS FINAL ELEMENTS FOR PLATE BENDING PROBLEM SOLUTION

The method of final elements modification with ten degree of freedom is proposed, in which for the solution of plate bending problems as the tenth degree of freedom the shift angle at node located at the origin is used. The final elements method of rectangular shape with thirteen degree of freedom are considered.

Keywords: final elements, nodal movement, quadratic programming, plate, bending.

Литература

1. Геворкян Г. А., Саркисян Р. М. Метод конечных элементов треугольных форм с десятью степенями свободы для решения задач изгиба пластин// Вестник инженерной академии Армении. Ереван, 2012. Т.9, N2. С.269-382.
2. Геворкян Г. А., Пирумян Н.В., Мехрабекян Н.Р., Саркисян Р. М. Об одной модификации метода конечных элементов треугольной формы для решения задач изгиба пластин// Сборник научных трудов Ереванского государственного университета архитектуры и строительства. 2012. Том II (45). С. 119-127.
3. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974. 384 с.
4. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 636 с.

Работа осуществлена в рамках программы "Выявление, уточнение, разработка предложений и рекомендаций по внедрению путей устойчивого развития архитектурного и строительного комплексов РА с применением постоянного мониторинга", по базовому финансированию из госбюджета РА научной и научно-технической деятельности.

Գևորգյան Գագիկ Արշալույսի, ֆ.ս.գ.դ., պրոֆ. (ՀՀ, ք. Երևան)-ԵՃՇՊՀ, Ինֆորմատիկայի, հաշվողական տեխնիկայի և կառավարման համակարգերի ամբիոն, Հեռ.: (010)540874; Բջջ.: (093)229253; e-mail:gagikgevorgyan2006@yahoo.com; Փիրումյան Նարինե Վիլիկի, տ.գ.թ. (ՀՀ, ք. Երևան)-ԵՃՇՊՀ, Գիտահետազոտական սեկտոր, գիտ. քարտուղար, (010)580541; e-mail: science@ysuac.am; Մեհրաբեկյան Նոննա Ռաֆայելի (ՀՀ, ք. Երևան) - ԵՃՇՊՀ, ֆ. ս. ամրակառուցման ինժեներական մեթոդաբանության բաժին, մասնագետ, Բջջ.: (095)613045; e-mail: nonna2004n@yahoo.com; Սարգսյան Գրետա Ալբերտի (ՀՀ, ք. Երևան)-ԵՃՇՊՀ, Ալ. Թամանյանի անվ. ճարտարապետության և շինարարության պրոբլեմային լաբորատորիա, հեռ. (010) 580541 e-mail: lilson22@gmail.com

Геворгян Гагик Аршалуйсович, д.ф.-м.н., проф. (РА, г.Ереван)-ЕГУАС, кафедра Информатики, вычислительной техники и систем управления, тел.: (010)540874; моб.: (093)229253; e-mail: gagikgevorgyan2006@yahoo.com. Пирумян Нарине Виликовна, к.т.н.(РА, г.Ереван)- ЕГУАС, Научно-исследовательский сектор, ученый секретарь, тел.:(010)580541, e-mail: science@ysuac.am; Мехрабекян Нонна (РА, г.Ереван)-ЕГУАС, отдел методологии преподавания физ.-мат.дисциплин, специалист, моб.: (095)613045; e-mail: nonna2004n@yahoo.com. Саркисян Грета Альбертовна (РА, г.Ереван)-ЕГУАС, пробл. лаб. архитектуры и строительства им. Ал. Таманяна тел.(010)580541 e-mail: lilson22@gmail.com

Gevorgyan Gagik Arshaluys, doctor of sciences (engineering) (RA, Yerevan) – YSUAC, Chair of Informatics, Computer Engineering and Management Systems, Phone: (010)540874; cell: (093)229253; e-mail: gagikgevorgyan2006@yahoo.com. Pirumyan Narine Vilik, doctor of philosophy (Ph.D) in engineering (RA, Yerevan)- YSUAC, Scientific Research Sector, scientific secretary, phone:(010)580541; e-mail: science@ysuac.am; Mehrabekyan Nonna Rafael (RA, Yerevan) - YSUAC, department of teaching methodology of f.-m. disciplines, specialist, Cell: (095)613045; e-mail: nonna2004n@yahoo.com. Sargsyan Greta Albert (RA, Yerevan)- YSUAC, Problem Laboratory of Architecture and Construction after Al. Tamanyan, tel.: (010)580541, e-mail: lilson22@gmail.com

Ներկայացվել է՝ 03.04.2013 թ.

Ընդունվել է տպագրության՝ 05.04.2013 թ.