

К ВОПРОСУ ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ЧИСЛЕННОЙ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ НИЗШИХ ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОЙ ВОЛНИСТОЙ ОБОЛОЧКИ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

Виктор Дмитриевич Еремин

¹Академия строительства и архитектуры Донского государственного технического университета (ДГТУ),
г.Ростов-на-Дону, РФ
interzentrum@yahoo.com; eremin.vd@yandex.ru

Рассматривается задача о собственных колебаниях упругой тонкой некруговой цилиндрической волнистой оболочки. На основе предложенной методики определения низших частот и соответствующих им форм собственных колебаний оболочек усложненной формы проведено дополнительное исследование численной сходимости алгоритма и достоверности получаемых результатов. Дана оценка этого численного эксперимента. В основу предложенной методики положен энергетический метод Релея-Ритца.

Ключевые слова: *сходимость, частота, форма собственных колебаний, тонкая оболочка, энергетический метод*

Введение

Совершенствование инженерных конструкций привело к необходимости разработки динамики оболочек сложного строения: слоистых и гофрированных, волнистых и подкрепленных стержневым набором.

Анализируя работы по динамике оболочек, следует отметить, что в целом теория колебаний оболочек, особенно оболочек сложных форм, разработана еще недостаточно.

Предлагается методика определения низших частот и соответствующих им форм собственных колебаний тонких оболочек сложной формы энергетическим методом, приемлемая для использования в инженерной практике.

Как частный случай, эта методика реализует расчет гладких оболочек с любыми граничными условиями.

1. Постановка задачи

В статье приводятся результаты дополнительно проведенных исследований численной сходимости предложенного алгоритма определения низших частот и соответствующих им форм собственных колебаний упругих тонких оболочек усложненной формы.

В основу предложенной методики положен энергетический метод Релея-Ритца, позволяющий получить достаточно точные значения низших частот и форм собственных колебаний тонких волнистых оболочек при произвольных граничных условиях и при любом законе изменения ее геометрических параметров.

Эта методика заменяет дифференциальные уравнения однородной системой линейных алгебраических уравнений [1-6]. Расчет выполняется на основе геометрической и физической

линейности с использованием гипотез Кирхгофа – Лява.

2. Решение численного примера

Предложенная методика определения частот собственных колебаний применена для расчета реальной цилиндрической тонкой волнистой оболочки прямоугольной в плане (рис.1).

Поперечное сечение срединной поверхности оболочки (по гребню) очерчено по кривой, уравнение которой

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^3}{b^3} = 1. \quad (1)$$

Срединная поверхность оболочки образована перемещением кривой

$$\alpha = -\Delta \left(1 - \cos \pi \frac{z}{\ell}\right) \quad (2)$$

по двум соседним гребням оболочки и находящейся в нормальной плоскости к ним.

Здесь:

Δ – амплитуда волны косинусоиды, 2ℓ – длина волны косинусоиды.

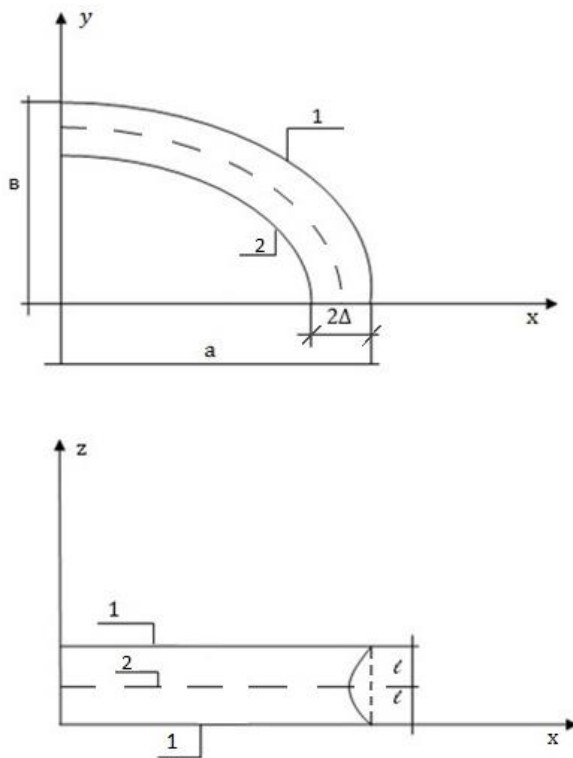


Рис. 1. Поверхность оболочки: 1 – гребень, 2 – впадина

Геометрические характеристики (размеры оболочки)

Пролет – $2a = 18\text{м}$, высота в поперечном сечении, проходящем через гребень оболочки – $b = 5\text{м}$, длина волны – $2\ell = 3\text{м}$, амплитуда волны – $\Delta = 0,225\text{м}$, полюсное расстояние – $B_o = 9\text{м}$, толщина оболочки – $2h = 0,05\text{м}$.

Физические характеристики

Модуль упругости материала оболочки – $E = 28 \text{ ГПа}$, коэффициент Пуассона – $\mu = \frac{1}{6}$,

плотность материала оболочки – $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$.

Цель работы – исследование численной сходимости разработанного алгоритма определения низших частот и соответствующих им форм собственных колебаний оболочек усложненной формы.

Предполагается, что длина оболочки вдоль оси Z (рис.1) достаточно велика, поэтому можно ограничиться рассмотрением только ее средних участков, не учитывая влияние частей оболочки, примыкающих к ее торцам. Получено векторное уравнение срединной поверхности этой оболочки, выведены формулы для вычисления параметров Ляме и символов Кристоффеля данной оболочки [4, 5].

Подобраны функции, аппроксимирующие амплитуды перемещений точек срединной поверхности оболочки вдоль криволинейных осей координат, в виде двойных тригонометрических рядов, удовлетворяющие трем вариантам граничных условий – жесткой заделке ($\alpha_2 = \pm 1$: $u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 0$; $u_{3,2}^0 = 0$), шарнирно – неподвижному опиранию по нижнему контуру вдоль образующей ($\alpha_2 = \pm 1$: $u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 0$), а также для случая, когда по нижнему контуру вдоль образующей с координатой $\alpha_2 = +1$ оставлена жесткая заделка ($\alpha_2 = +1$: $u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 0$; $u_{3,2}^0 = 0$), а нижний контур вдоль образующей с координатой $\alpha_2 = -1$ был оперт шарнирно – неподвижно ($\alpha_2 = -1$: $u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 0$), (рис.2).

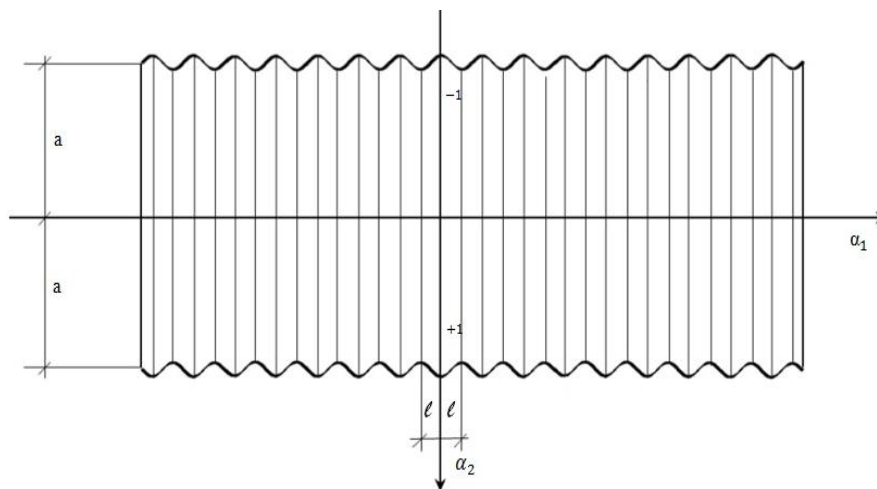


Рис. 2. Расчетная схема оболочки

По формулам, приведенным в [4, 6], получены все матрицы, необходимые для определения низших частот и соответствующих им форм собственных колебаний данной тонкой волнистой оболочки.

3. Исследование численной сходимости алгоритма расчета

Как известно, энергетический метод Релея-Ритца дает приближение сверху для частот собственных колебаний оболочки, другими словами, любая принятая форма колебаний приводит к определению собственной частоты, которая больше истинной частоты. С целью проверки

правильности полученных значений низших частот собственных колебаний волнистой оболочки, рассматриваемой в нашем примере, и контроля за численной сходимостью алгоритма была предпринята попытка получить хотя бы грубое приближение снизу. Для этого были дополнительно определены низшие частоты собственных колебаний данной оболочки с ослабленными граничными условиями, а именно: по нижнему контуру вдоль образующей с координатой $\alpha_2 = +1$ (рис.2) была оставлена жесткая заделка, а нижний контур вдоль образующей с координатой $\alpha_2 = -1$ был оперт шарнирно-неподвижно.

Для контроля за численной сходимостью алгоритма расчет волнистой оболочки (рис.1) производился методом последовательных приближений, путем поэтапного увеличения количества членов ряда, аппроксимирующего решение. В первом приближении в двойных тригонометрических рядах, аппроксимирующих амплитуды перемещений точек срединной поверхности оболочки вдоль криволинейных осей координат, было оставлено четыре члена ($m = n = 2$), потом девять ($m = n = 3$), шестнадцать ($m = n = 4$), двадцать пять ($m = n = 5$) и, наконец, тридцать шесть членов ряда ($m = n = 6$).

Результаты вычислений для первых трех частот собственных колебаний тонкой волнистой оболочки с тремя вариантами граничных условий ($m = n = 6$) [7, 8] приведены в таблице.

Таблица

Граничные условия оболочки

Номер частоты, Γ_{ω}	$\alpha_2 = +1: u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = u_{3,2}^0 = 0,$ $\alpha_2 = -1: u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = u_{3,2}^0 = 0$	$\alpha_2 = +1: u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = u_{3,2}^0 = 0,$ $\alpha_2 = -1: u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 0$	$\alpha_2 = +1: u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 0,$ $\alpha_2 = +1: u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 0$
ω_1	58,3	56,8	49,2
ω_2	66,2	62,9	58,4
ω_3	81,4	77,5	73,1

Выводы

Сравнение значений частот собственных колебаний данной волнистой оболочки с этими тремя вариантами граничных условий подтверждает достоверность результатов, получаемых по предложенной методике, и указывает на хорошую сходимость алгоритма расчета.

ԲԱՅ ՊՐՈՑԵԼՈՎ ԲԱՐԱԿ ԱԼԻՔԱԶԵՎ ԹԱՂԱՆԹԻ ՄԵՓԱԿԱՆ ՏՍՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՁԵՎԻ ԵՎ ՑԱՏՐ ՀԱՃԱԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄԻ ԹՎԱՅԻՆ ԶՈՒԳԱՄԻՏՄԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Վիկտոր Դմիտրիի Երյոմին

Դոնի պետական տեխնիկական համալսարանի շինարարության և ճարտարապետության ակադեմիա,
բ.Դոնի Ռոստով, ՌԴ

interzentrum@yahoo.com, eremin.vd@yandex.ru

Դիտարկված է առաձգական բարակ ոչ շրջանալին զլանական ալիքաձև թաղանթի սեփական տատանումների խնդիրը: Բարդ ձևի թաղանթների սեփական տատանումների

բնույթի և ցածր հաճախությունների որոշման առաջարկված մեթոդիկայի հիմքով կատարված է լրացուցիչ հետազոտություն ստացված արդյունքների հավաստիության և ալգորիթմի թվային զուգամիտման վերաբերյալ: Տրված է թվային փորձարկման գնահատականը: Առաջարկված մեթոդիկայի հիմքում դրված է Ռելեյ-Ռիտսի էներգետիկական մեթոդը:

Առանցքային բառեր. զուգամիտություն, հաճախություն, սեփական տատանումների ձև, բարակ թաղանթ, էներգետիկական մեթոդ

ON THE ISSUE OF INVESTIGATION OF THE NUMERICAL CONVERGENCE OF THE ALGORITHM FOR DETERMINING THE LOWER FREQUENCIES AND MODES OF THE OPEN PROFILE THIN WAVY SHELL'S NATURAL OSCILLATIONS

Victor Eryomin

Academy of Construction and Architecture of Don State Technical University
interzentrum@yahoo.com; eremin.vd@yandex.ru.

The problem of natural oscillations of the elastic thin non-circular cylindrical wavy shell is considered. On the basis of the proposed algorithm of determining the lower frequencies and the corresponding modes of complicated form shells' natural oscillations, we conducted further research of the algorithm's numerical convergence and the results' validity. The evaluation of the numerical experiment is given. The proposed algorithm is based on the energy method of Rayleigh-Ritz.

Keywords: convergence, frequency, mode of natural oscillations, thin shell, energy method

Литература

1. Аксентян К.Б., Гордеев-Гавриков В.К. Вариационно-энергетический метод расчета колебаний инженерных сооружений. - Ростов-на-Дону: РГУ, 1979. - 272с.
2. Аксентян К.Б., Еремин В.Д. Принцип возможных перемещений в случае свободных колебаний// Расчет оболочек и пластин. - Ростов-на-Дону: РИСИ, 1977. - С.43 – 52.
3. Еремин В.Д. Влияние граничных условий на низшие частоты и формы собственных колебаний незамкнутой цилиндрической волнистой оболочки // Облегченные конструкции покрытий зданий. - Ростов-на-Дону: РИСИ, 1984. - С.45 – 58.
4. Еремин В.Д. Определение частот и форм собственных колебаний оболочек неклассической формы // Научные труды НУАСА. - Ереван, 2015. - Т.1. – С.94 – 100.
5. Еремин В.Д. Собственные колебания некруговой цилиндрической упругой тонкой волнистой оболочки открытого профиля // Научные труды НУАСА. - Ереван, 2015. - Т.1. - С.101 – 108.
6. Еремин В.Д. К расчету собственных колебаний тонкой волнистой оболочки открытого профиля// Научные труды НУАСА. - Ереван: НУАСА, 2016. - Т.1. - С. 64 – 71.
7. Еремин В.Д. Исследование численной сходимости алгоритма определения низших частот и форм собственных колебаний оболочек усложненной формы // Научные труды НУАСА. – Ереван: НУАСА, 2016. - Т.1. - С. 72 - 77.
8. Еремин В.Д. К вопросу об исследовании численной сходимости алгоритма определения низших частот и форм собственных колебаний оболочек усложненной формы // Научные труды НУАСА. – Ереван: НУАСА, 2017. - Т. 3. - С. 50 – 55.

References

1. **Aksentjan K.B., Gordeev – Gavrikov V.K.** (1979), *Variatsionno – energeticheskiy metod raschjota kolebaniy injenernykh sooruzheniy* [Variation – energy method of calculation oscillations of engineering structures]. Rostov – on – Don, RGU, 272 p.
2. **Aksentjan, K.B., Eryomin, V.D.** (1977), Printsip vosmojnykh peremescheniy v sluchae svobodnykh kolebaniy [The principle of possible displacements in the case of free oscillations]. *Raschjot obolochek i plastin*, pp. 43 – 52, (in Russian)
3. **Eryomin, V.D.** (1984), Vliyanie granichnykh usloviy na nishhie chastoty i formy sobstvennykh kolebaniy nesamknutoy tsilindricheskoy volnistoy obolochki [The influence of boundary conditions on the lower frequencies and forms of natural oscillations of the unconfined cylindrical wavy shell]. *Oblegchyonnye konstruksii pokrytiy sdaniy*, pp. 45 – 58, (in Russian)
4. **Eryomin, V.D.** (2015), Opredelenie chastot i form sobstvennykh kolebaniy obolochek neklassicheskoy formy [Determination of frequencies and modes of natural oscillations of the shells of a nonclassical shape]. *Scientific papers of National University of Architecture and Construction of Armenia (NUACA)*, no. 1, pp.94 – 100, (in Russian)
5. **Eryomin, V.D.** (2015), Sobstvennye kolebaniya nekrugovoy cilindricheskoy uprugoy volnistoy obolochki otkrytogo profilja [Natural oscillations of a non-circular cylindrical elastic thin undulating shell of an open profile]. *Scientific papers of National University of Architecture and Construction of Armenia (NUACA)*, no. 1, pp.101 – 108, (in Russian)
6. **Eryomin, V.D.** (2016), K raschyotu sobstvennykh kolebaniy tonkoy volnistoy obolochki otkrytogo profilja [On the problem of calculation of the natural oscillations of a thin undulating shell of an open profile]. *Scientific papers of National University of Architecture and Construction of Armenia (NUACA)*, no. 1, pp.64 – 71, (in Russian)
7. **Eryomin, V.D.** (2016), Issledovanie chislennoy skhodimosti algoritma opredeleniya nishshikh chastot i form sobstvennykh kolebaniy obolochek uslojnyonnoy formy [Investigation of the numerical convergence of the algorithm for determining the lower frequencies and modes of complicated form shell's natural oscillations]. *Scientific papers of National University of Architecture and Construction of Armenia (NUACA)*, no. 1, pp.72 – 77, (in Russian)
8. **Eryomin, V.D.** (2017), K voprosu ob issledovanii chislennoy skhodimosti algoritma opredeleniya nishshikh chastot i form sobstvennykh kolebaniy obolochek uslojnyonnoy formy [On the issue of investigation of the numerical convergence of the algorithm for determining the lower frequencies and modes of the complicated form shell's natural oscillations]. *Scientific papers of National University of Architecture and Construction of Armenia (NUACA)*, no. 3, pp.50 – 55, (in Russian)

Երյոմին Վիկտոր Վիկտորիի, տ.գ.թ., պրոֆ. (ՌՖ, ք.Ղոնի Ռոստով) – Ղոնի պետական տեխնիկական համալսարանի Շինարարության և ճարտարապետության ակադեմիա (ԴՊՏՀ), Նյութերի դիմադրության ամբիոն, +7(928) 2960811, interzentrum@yahoo.com; eremin@rgsu.ru

Еремин Виктор Дмитриевич, к.т.н., профессор (РФ, г.Ростов-на-Дону) - Академия строительства и архитектуры Донского государственного технического университета (ДГТУ), кафедра “Сопротивление материалов”, +7 (928) 2960811, interzentrum@yahoo.com; eremin.vd@yandex.ru

Eryomin Victor, doctor of philosophy (PhD) in engineering, professor (RF, Rostov-on-Don) - Academy of Construction and Architecture of Don State Technical University (DSTU), chair of Strength of Materials, +7(928) 2960811, interzentrum@yahoo.com; eremin.vd@yandex.ru

Ներկայացվել է՝ 26.02.2018թ.

Ընդունվել է տպագրության՝ 02.03.2018թ.